Corrélation maximale et monotonie de l'entropie libre

Benjamin Dadoun, Pierre Youssef

0) Introduction

X, Y variables aléatoires L^2

$$\rho(X,Y) = \frac{|\mathrm{Cov}(X,Y)|}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1,1] \quad \text{corrélation linéaire}$$

$$R(X,Y) = \sup\left\{ \rho(f(X), g(Y)) \ : \ f \in L^2(X),\ g(Y) \in L^2 \right\}$$

corrélation maximale

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \qquad X_i \ \text{iid} \quad L^2$$

Théorème (Dembo - Kagan - Shepp '01)

$$R(S_m, S_n) = \sqrt{\frac{m}{n}} \qquad \forall m \leq n$$

quelle que soit la loi de la marche

Corollaire (Courtade '16) preuve simple de la monotonie de l'entropie le long du TCL

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Conjecture de Shannon : l'entropie de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ croît : $\left(\mathcal{E}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right) \nearrow$

$$X \text{ à densité } f : \quad \mathcal{E}(X) = -\mathbb{E}[\log f(X)]$$

prouvée par Artstein - Ball - Barthe - Naor '04.

Notre but est d'adapter le théorème aux probas libres.

1) Probas libres (Voiculescu '90s, Mingo-Speicher '10)

on a des variables non commutatives $\qquad \left(\mathbb{E}[f(X)]\right)_{f \in \mathcal{C}}$

M $\mathbb{C}$-algèbre avec involution

$x, y \in M$ variables aléatoires non commutatives

τ forme [illegible] linéaire

$x, y \overset{\sigma}{\in} M$ variables aléatoires non commutatives

τ forme $*$-linéaire

- $\tau(1) = 1$ $\qquad M = M_n(\mathbb{C}) \quad \tau = \frac{1}{n} \operatorname{tr}$
- $\tau(xy) = \tau(yx)$ $\qquad \tau = \frac{1}{n} \mathbb{E} \circ \operatorname{Tr}$
- $\tau(xx^*) \geq 0$
- $\tau(xx^*) = 0 \implies x = 0$

loi de $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$ $\quad \left(\tau(P(x_1, \dots, x_n)) \right)_{P \in \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle} =: \mu_{x_1, \dots, x_n}$

$$\tau(xyxy) \neq \tau(x^2 y^2)$$

- <u>indépendance libre</u> quand $\mu_{(x_1, \dots, x_n)}$ est déterminée par μ_{x_i}

$M_1, M_2 \dots$ sous-algèbre M libres si

"tout produit alternant de variables centrées est centré"

$$\begin{cases} x_1 \in M_{i_1}, x_2 \in M_{i_2} \dots & i_1 \neq i_2 \quad i_2 \neq i_3 \quad i_3 \neq i_4 \dots \\ \tau(x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\implies \tau(x_1 \cdots x_n) = 0$$

- $\tau(xyxyxyxy)$ = une fonction des $\tau(x^i)$ et $\tau(y^i)$

- on dit que (x_i) est libre si les sous-algèbres $\mathbb{C}\langle x_i \rangle$ le sont.

2) Corrélation maximale

(M, τ)

$\langle x, y \rangle = \tau(xy^*)$ structure hilbertienne

$(L^2(M), \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$\operatorname{cov}(x, y) = \langle x - \tau(x), y - \tau(y) \rangle \qquad (\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y))$$

$$\rho(x, y) = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)} \qquad \sigma(x) = \sqrt{\operatorname{cov}(x, x)}$$

$$L^2(x_1, \dots, x_n) = \overline{\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle}^{L^2(M)}$$

$$R(x,y) = \sup_{L^2(x) \times L^2(y)} \rho$$

Théorème (D. Yousef)
$s_n := x_1 + \dots + x_n$ - x_i libres identiquement distribués $\neq 0$

Alors $R(s_m, s_n) = \sqrt{\frac{m}{n}}$ $\forall m \leq n$

Corollaire on en déduit la monotonie de l'entropie libre

μ mesure de proba réelle

$$\chi(\mu) = \iint_{\mathbb{R}^2} \log|s-t| \, \mu(ds)\mu(dt) + \frac{3}{4} + \log(2\pi)$$

(il existe x tq $\tau(x^k) = \int x^k \mu(dx)$) $\quad L^\infty(\mu)$
$\tau(f) = \int f(t)\mu(dt)$

$\chi\left(\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right) \nearrow$ avec n (Shlyakhtenko '07)

TCL libre $\frac{s_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \sigma$ semi-circulaire
$(x_i^* = x_i)$

3) Preuve

$L^2(x_1, \dots, x_n)$

$I \subseteq \mathbb{N}$ finie $\quad L^2_I = L^2(x_i : i \in I)$

espérance conditionnelle sachant $(x_i : i \in I)$
$\tau(z \mid x_i : i \in I) = \tau(z \mid I)$
projection orthogonale sur L^2_I.

. $\tau(\tau(z \mid I) \mid J) = \tau(z \mid J) \quad J \subseteq I$

. Si $x_1, \dots, x_n$ libres

Lemme $\tau(\tau(z \mid I) \mid J) = \tau(z \mid I \cap J)$

(Biane '97 et Nica-Speicher '97)

$$\mathcal{E}(z \mid I) \in L^2_I$$

si $z = p(x_1,\dots,x_n)$ $\quad I \subseteq \{1,\dots,n\}$, $\quad p \in \mathbb{C}\langle X_1,\dots,X_n\rangle$

$$\mathcal{E}(z \mid x_i : i\in I) \in \mathbb{C}\langle x_i : i \in I\rangle$$

$$E[\,P(X,Y) \mid X\,] = \int P(X,y)\,\mu_Y(dy)$$

ANOVA (Efron-Stein)

$I \subseteq \mathbb{N}$ fini

$$z_I = \sum_{J\subseteq I} (-1)^{|I|-|J|}\,\mathcal{E}(z \mid J)$$

$z \in M$

$$z_\emptyset = \mathcal{E}(z)$$

$$z_{\{1\}} = \mathcal{E}(z \mid x_1) - \mathcal{E}(z)$$

$$z_{\{1,2\}} = \mathcal{E}(z \mid x_1,x_2) - \mathcal{E}(z \mid x_1) - \mathcal{E}(z \mid x_2) + \mathcal{E}(z)$$

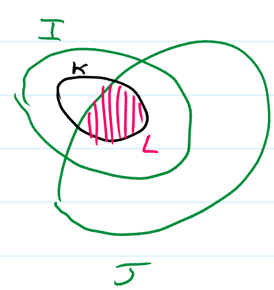
Lemme 1 $\quad \displaystyle\sum_{J\subseteq I} z_J = \mathcal{E}(z \mid I)$

Lemme 2 $\quad$ les z_J sont orthogonaux

Preuve $\quad I, J \subseteq \mathbb{N} \quad I\setminus J \neq \emptyset \quad z_I \perp z_J$

$\mathcal{E}(z_I \mid J) = 0 \quad$ ($z_i \perp L^2_J$ donc $\perp z_J \in L^2_J$)

$$z_I = \sum_{K\subseteq I}(-1)^{|I|-|K|}\,\mathcal{E}(z \mid K)$$



$$\mathcal{E}(z_I \mid J) = \sum_{K\subseteq I}(-1)^{|I|-|K|}\,\mathcal{E}(z \mid \underbrace{K\cap J}_{L})$$

$$= \sum_{L\subseteq I\cap J}\left(\sum_{\substack{K\subseteq I\\ K\cap J = L}}(-1)^{|I|-|K|}\right)\mathcal{E}(z \mid L)$$

$$= \sum_{K\subseteq I\setminus J}(-1)^{|I|-|K|-|L|}$$

$$= \left(\sum_{K \subseteq I \setminus J} (-1)^{|K|} \right) (-1)^{|I|-|L|}$$

$$(1-1)^{|I|-|J|} = 0 \qquad \blacksquare$$

Prop (perte de variance)

$\mathcal{P}_m(n)$ = parties de $\{1,\dots,n\}$ ayant m éléments

$z \in L^2(x_1,\dots,x_n) = L^2_{[n]}$ $\quad \mathcal{E}(z) = 0 \qquad\qquad \mathcal{E}(z) = z_\emptyset$

$$\sum_{I \in \mathcal{P}_m(n)} \| \mathcal{E}(z \mid x_i : i \in I) \|^2 \leq \binom{n-1}{m-1} \|z\|^2$$

Preuve LHS $= \displaystyle\sum_{I \in \mathcal{P}_m(n)} \Big\| \sum_{J \subseteq I} z_J \Big\|^2$ (lemme 1)

$$= \sum_{I \in \mathcal{P}_m(n)} \sum_{J \subseteq I} \|z_J\|^2 \qquad \text{(lemme 2)}$$

$$= \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ J \neq \emptyset \\ j_0 \in J}} \underbrace{\sum_{\substack{I \in \mathcal{P}_m(n) \\ I \supseteq J}} \|z_J\|^2}_{\leq \binom{n-1}{m-1} \|z_J\|^2}$$

au plus $\binom{n-1}{m-1}$ éls de $\mathcal{P}_m(n)$ qui contiennent j_0

$$= \binom{n-1}{m-1} \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ J \neq \emptyset}} \|z_J\|^2$$

$$= \binom{n-1}{m-1} \| \mathcal{E}(z \mid x_1,\dots,x_n) \|^2$$

$$= \binom{n-1}{m-1} \|z\|^2 \qquad z \in L^2(x_1,\dots,x_n) \qquad \blacksquare$$

Madiman - Barron '06.

Preuve de la corrélation maximale $\quad m \leq n$

$$\forall z \in L^2(x_1,\dots,x_n), \ \mathcal{E}(z) = 0, \quad \sum_{I \in \mathcal{P}_m(n)} \| \mathcal{E}(z \mid I) \|^2 \leq \binom{n-1}{m-1} \|z\|^2$$

Supposons x_i identiquement distribués

$z \in L^2(s_n)$ $\quad z = p(s_n) \in \mathcal{C}\langle s_n \rangle$ $\quad \mathcal{E}(z) = 0$

$$\| \mathcal{E}(z \mid I) \| = \| \mathcal{E}(z \mid x_1,\dots,x_m) \| \qquad \forall I \in \mathcal{P}_m(n)$$

$$\| \mathcal{E}(z \mid \mathcal{I}) \| = \| \mathcal{E}(z \mid x_1, \dots, x_m) \| \quad \forall \mathcal{I} \in \mathcal{U}_m(n)$$

$$\| \mathcal{E}(z \mid x_1, \dots, x_m) \|^2 \leq \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} \|z\|^2 = \frac{m}{n} \|z\|^2$$

Soit $z' \in L^2(s_m)$ $\mathcal{E}(z') = 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(z, z') &= \langle z, z' \rangle = \langle \mathcal{E}(z \mid x_1, \dots, x_m), z' \rangle \\ &\leq \| \mathcal{E}(z \mid x_1, \dots, x_m) \| \, \|z'\| \\ &\leq \sqrt{\tfrac{m}{n}} \, \|z\| \, \|z'\| \qquad \forall z \in L^2(s_n) \; \forall z' \in L^2(s_m) \\ &= \sqrt{\tfrac{m}{n}} \, \sigma(z) \, \sigma(z') \end{aligned}$$

$$R(s_m, s_n) \leq \sqrt{\frac{m}{n}}$$

□

$x \in M$ $\quad \xi(x) \in L^2(M)$ tq $\quad \mathcal{E}(\xi \, x^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{E}(x^i) \, \mathcal{E}(x^{k-1-i}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\uparrow$ score

$$\mathbb{E}[\xi(X) f(X)] = \mathbb{E}[f'(X)^2]$$

Inf. de Fisher $\rightarrow \Phi(x) = \| \xi(x) \|^2$

$$\mathcal{X}(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - \Phi(z + \sqrt{t}\,\sigma) \right) dt + \frac{1}{2} \log(2\pi e)$$

$$s_n = s_m + (s_n - s_m)$$

$$\begin{aligned} \Phi(s_n) &= \| \xi(s_n) \|^2 = \| \mathcal{E}(\xi(s_m) \mid s_n) \|^2 \\ &= \langle \mathcal{E}(\xi(s_m) \mid s_n), \xi(s_m) \rangle \\ &\leq \sqrt{\tfrac{m}{n}} \, \| \xi(s_m) \| \, \| \xi(s_n) \| \\ &= \sqrt{\tfrac{m}{n}} \sqrt{\Phi(s_n)} \sqrt{\Phi(s_m)} \end{aligned}$$

$$\Phi(\alpha x) = \alpha^{-2} \Phi(x)$$

$$\Phi\left(\frac{s_n}{\sqrt{n}} \right) \leq \Phi\left(\frac{s_m}{\sqrt{m}} \right)$$

$$\Phi(s_n + \sqrt{t}\,\sigma)$$

□