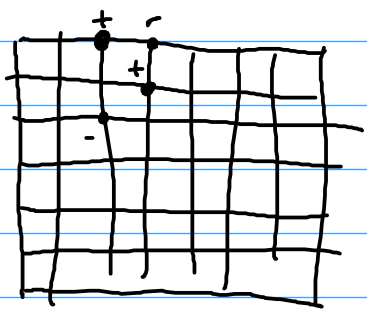
Introduction aux inégalités fonctionnelles et vitesse de convergence dans le modèle d'Ising. (spin bornés ± 1)

I) Modèle d'Ising
II) Dynamique de Glauber
III) Inégalités fonctionnelles et vitesse de convergence
IV) Inégalités fonctionnelles pour le modèle d'Ising.

I) Modèle d'Ising

μ_Λ mesure d'équilibre d'un sys. de part $\in \{\pm 1\}$ sur un reseau de taille fini $\subset \mathbb{Z}^d$

Λ



$$\sigma = (\sigma_i)_{i\in\Lambda} \in \{-1,1\}^\Lambda = \{-1,1\}^N \qquad N = |\Lambda|$$
$$\in \mathcal{X}$$

μ_Λ une proba

$$\sigma\in\mathcal{X}, \quad \mu_\Lambda(\sigma) = \mu(\sigma) = e^{-V(\sigma)} \propto e^{+\langle M\sigma,\sigma\rangle + \langle h,\sigma\rangle}$$

$\langle\, , \rangle$ produit scalaire sur $\mathbb{R}^N$

M une matrice symétrique
$h\in\mathbb{R}^N$

$$\langle M\sigma,\sigma\rangle = \sum_{i,j\in\Lambda} M_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j$$
$$\langle h,\sigma\rangle = \sum_{i\in\Lambda} h_i\,\sigma_i$$

<u>Ex</u> : $h=0$ $\quad M_{ij}>0$ modèle ferromagnétique
$M_{ij}=\beta \;\; \forall i,j \quad \beta>0$ modèle de Curie Weiss.
M_{ij} de signe quelconque $\rightsquigarrow$ désordre ferromagnétique

Rq : 1) La diagonale de M n'a aucune influence sur μ_Λ $\quad \sum_i M_{ii} \underbrace{\sigma_i \sigma_i}_{1} = c^{te}$

⇝ on ne change pas μ_Λ en ajoutant à M un multiple de l'identité

2) $M = 0$ alors $\mu_\Lambda \propto \prod_{i \in \Lambda} e^{h_i \sigma_i}$ mesure produit

II) Dynamique de Glauber

Guionnet - Zegarlinski 2002
Lecture on Log-Sob inequalities

But : approcher μ_Λ par un processus de Markov en partant d'une configuration τ

Comment s'assurer d'une bonne convergence ?

$(P_t)_{t \geq 0}$ semi groupe agissant sur $f : X \to \mathbb{R}$
(P_t est linéaire, $P_0 = Id$, $P_t P_s = P_{t+s}$)

de Markov : $P_t \mathbb{1} = \mathbb{1}$, $P_t f \geq 0$ pour $f \geq 0$

$\tau, \sigma \in X$: $P_t(\tau, \sigma) = P_t(\delta_\sigma)(\tau)$

$\forall \tau \in X$, $P_t(\tau, \cdot)$ est une proba

$$P_t f(\tau) = \sum_{\sigma \in X} f(\sigma) P_t(\tau, \sigma)$$

Générateur infinitésimal

$$Lf := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (P_t - Id)(f)$$

$\mathcal{D}(L) = \{$ens des fct pour lesquelles la limite existe$\}$

Propriété de semi groupe $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt} P_t f = L P_t = P_t L$

$P_t \mathbb{1} = \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ $L \mathbb{1} = 0$ posons $L(\tau,\sigma) := L(\delta_\sigma)(\tau)$

on a
$$\begin{cases} L(\sigma,\sigma) \leq 0 \quad , \quad \underbrace{L(\tau,\sigma)}_{\text{taux de saut}} \geq 0 \quad \tau \neq \sigma \\ \sum_{\sigma, \sigma \neq \tau} L(\tau,\sigma) = -L(\tau,\tau) \end{cases}$$

$$Lf(\tau) = \sum_{\sigma \in X} f(\sigma) L(\tau,\sigma) = \sum_{\sigma, \sigma \neq \tau} (f(\sigma) - f(\tau)) L(\tau,\sigma)$$

On considère un processus de loi invariante $\mu_\Lambda = \mu$

<u>invariance</u> : $\mu_\Lambda(f) = \mu_\Lambda(P_t f) \quad \forall t$

$$\mu_\Lambda(f) = \sum_\sigma f(\sigma) \mu_\Lambda(\sigma)$$

$\Uparrow$ $\Leftarrow$ $\mu_\Lambda(Lf) = 0$

<u>reversible</u> : $\forall \tau, \sigma$ $\mu(\tau) P_t(\tau,\sigma) = \mu(\sigma) P_t(\sigma,\tau)$
$\mu(\tau) L(\tau,\sigma) = \mu(\sigma) L(\sigma,\tau)$

$\forall f, g$ $\mu_\Lambda(f Lg) = \mu_\Lambda(g Lf)$

Modèle d'interaction au plus proche voisin.

$\sigma \in X$, $i \in \Lambda$ $s_i(\sigma)$ configuration voisine.

$$\begin{cases} (s_i(\sigma))_j = \sigma_j & \text{si } i \neq j. \\ (s_i(\sigma))_i = -\sigma_i \end{cases}$$

$L(\tau,\sigma) > 0$ ssi $\exists i \in \Lambda \quad \sigma = s_i(\tau)$

$L(\tau, s_i(\tau)) = L_i(\tau)$ $\qquad \mu_\Lambda(\sigma) = e^{-V(\sigma)}$

dyn de Glauber

- heat bath dynamic $\quad L_i^{(1)}(\sigma) = \dfrac{e^{-V(s_i(\sigma))}}{e^{-V(\sigma)} + e^{-V(s_i(\sigma))}}$

$$\mu_\Lambda(\sigma)\, L_i^{(1)}(\sigma) = \frac{e^{-[V(\sigma)+V(s_i(\sigma))]}}{e^{-V(\sigma)}+e^{-V(s_i(\sigma))}}$$

$$= \mu_\Lambda(s_i(\sigma))\, L_i(s_i(\sigma))$$

- métropolis $\quad L_i^{(2)}(\sigma) = e^{-[V(s_i(\sigma))-V(\sigma)]_+}$
- $L_i^{(3)}(\sigma) = e^{-\frac{1}{2}(V(s_i(\sigma)) - V(\sigma))}$

$$L_i^{4}(\sigma) = \frac{1}{2}\left[1 + e^{-(V(s_i(\sigma)) - V(\sigma))}\right]$$

$$\forall \tau \in X \qquad P_t(\tau, \cdot) \xrightarrow[\text{faiblement}]{} \mu_\Lambda$$

III) Inegalités fonctionnelles et vitesse de convergence

<u>2006</u> : Montenegro - Tetali
Mathematical aspects of mixing times in Markov chains

Comment evaluer la proximité de $P_t(\tau,\cdot)$ et μ_Λ ?

$$\|\mu_\Lambda - P_t(\tau,\cdot)\|_{T.V} = \sup_{A\subset X} |\mu_\Lambda(A) - P_t(\tau, A)|$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in X} |\mu_\Lambda(\sigma) - P_t(\tau,\sigma)| = \frac{1}{2}\| 1 - p_t(\tau,\cdot)\|_{\mu_\Lambda,1}$$

$$p_t(\tau,\sigma) = \frac{P_t(\tau,\sigma)}{\mu_\Lambda(\sigma)}$$

$$\chi_2\left(\mu_\Lambda , P_t(\tau,\cdot)\right) = Var_{\mu_\Lambda}\left(p_t(\tau,\cdot)\right) = \| 1 - p_t(\tau,\cdot)\|_{\mu_\Lambda,2}$$

$$D\left(P_t(\tau,\cdot) \mid \mu_\Lambda\right) = Ent_{\mu_\Lambda}\left(p_t(\tau,\cdot)\right)$$

f densité $/\mu$ $\quad Ent_\mu(f) = \int f \log f \, d\mu$

<u>mixing time</u>

$$\begin{cases} \tau(\varepsilon) = \inf\left\{t>0 \mid \forall \tau \in X, \ \|\mu_\Lambda - P_t(\tau,\cdot)\|_{T.V} \leq \varepsilon\right\} \\ \tau_2(\varepsilon) \rightsquigarrow \chi_2 \\ \tau_D(\varepsilon) \rightsquigarrow D \end{cases}$$

$$\|\cdot\|_{1,\mu} \leq \|\cdot\|_{2,\mu} \implies \tau(\varepsilon) \leq \tau_2(4\varepsilon^2)$$

$$\|\mu - \nu\|_{T.V}^2 \underset{\text{Pinsker}}{\leq} \frac{1}{2} D(\nu / \mu) \implies \tau(\varepsilon) \leq \tau_D(2\varepsilon^2)$$

Forme de Dirichlet associée à L

$$\mathcal{E}(f,g) = \mu(-f L g) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\tau} \left(f(\sigma) - f(\tau)\right)\left(g(\sigma) - g(\tau)\right) L(\tau,\sigma)\,\mu(\sigma)$$

$$\partial_i f(\sigma) = f(s_i(\sigma)) - f(\sigma)$$

$$\nabla f(\sigma) = \left(\partial_i f(\sigma)\right)_{i\in\Lambda}$$

$$\mathcal{E}^{(1)}(f,f) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in X} \sum_{i \in \Lambda} (\partial_i f)^2(\sigma)\, L_i^{(1)}(\sigma)\, \mu(\sigma)$$

$$\mathcal{E}^{(4)}(f,f) = \frac{1}{2} \quad \cdots \quad \underbrace{L_i^{(4)}(\sigma)\, \mu(\sigma)}_{\frac{\mu(\sigma)+\mu(s_i(\sigma))}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in X} \underbrace{|\nabla f|^2(\sigma)}_{= \sum_{i \in \Lambda} (\partial_i f)^2(\sigma)}\, \mu(\sigma)$$

On montre facilement

$$\frac{\mathcal{E}^{(2)}}{2} \leq \mathcal{E}^{(1)} \leq \mathcal{E}^{(2)} \leq \mathcal{E}^{(3)} \leq \mathcal{E}^{(4)} \leq \left(1 + \frac{1}{\mu^*}\right) \mathcal{E}^{(1)}$$

$\mu^* = \min_\sigma (\mu_\Lambda(\sigma))$ peut être très petit.

<u>Inégalités fonctionnelles</u>

<u>Def</u> : . constante de trou spectrale : meilleur $\lambda > 0$ tq

(P) $\quad \lambda \operatorname{Var}_\mu(f) \leq \mathcal{E}(f,f) \quad \forall f : X \to \mathbb{R}$

. constante de Log Sob : meilleur $\gamma > 0$ tq

(LS) $\quad \gamma \operatorname{Ent}_\mu(f) \leq 2\mathcal{E}(\sqrt{f}, \sqrt{f})$

. constante de Log Sob modifié meilleur $\rho > 0$ tq

(LSM) $\quad \rho \operatorname{Ent}_\mu(f) \leq \mathcal{E}(f, \log f)$

$$\underline{\text{Prop}} : \quad \boxed{\gamma \overset{(\alpha)}{\leq} \rho \overset{(\beta)}{\leq} 2\lambda} .$$

(α) car $\mathcal{E}(f, \log f) \geqslant 2\, \mathcal{E}(\sqrt{f}, \sqrt{f})$ $(\log x \leq x-1)$

(β) $f = 1 + \varepsilon g$ avec $\mu(g) = 0$

$$\mathcal{E}(f, \log f) = \varepsilon^2\, \mathcal{E}(g,g) + o(\varepsilon^2)$$

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) = \frac{\varepsilon^2}{2} \underbrace{\mu(g^2)}_{\mathrm{Var}(g)} + o(\varepsilon^2)$$

$\underline{\text{Prop}}$:

(a) $\lambda \geqslant c$ ssi $\mathrm{Var}_\mu(P_t f) \leqslant e^{-2ct}\, \mathrm{Var}(f)$

(b) $\rho \geqslant c$ ssi $\mathrm{Ent}_\mu(P_t f) \leqslant e^{-\rho t}\, \mathrm{Ent}(f)$

$\underline{\text{Dem}}$: (a)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{Var}_\mu(P_t f) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mu((P_t f)^2) - \mu(f)^2\right]$$

$$= 2\mu(P_t f\, L P_t f)$$

$$= -2\,\mathcal{E}(P_t f, P_t f)$$

$$\underset{(P)}{\geqslant} -2\lambda\, \mathrm{Var}_\mu(P_t f)$$

(b)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{Ent}_\mu(P_t f) = \frac{\partial}{\partial t} \mu(P_t f \log P_t f)$$

$$= \mu((\cancel{1} + \log P_t f) L P_t f)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{Ent}_\mu (P_t f) = \mathcal{E}(\log P_t f, P_t f)$$
$$\geq -\rho \, \mathrm{Ent}_\mu (P_t f)$$

<u>Consequence</u>

$$(*) \left| \begin{array}{l} \tau_2(\varepsilon) \leq \frac{1}{\lambda} \quad \frac{1}{2} \left[\log \frac{1-\mu^*}{\mu^*} + \log \frac{1}{\varepsilon} \right] \\ \\ \tau_D(\varepsilon) \leq \frac{1}{\rho} \left[\log \log \frac{1}{\mu^*} + \log \frac{1}{\varepsilon} \right] \end{array} \right.$$

$$\tau(\varepsilon) \leq \tau_2(4\varepsilon^2)$$
$$\tau(\varepsilon) \leq \tau_D(2\varepsilon^2)$$

<u>Dem</u> $(*)$ $D(P_t(\tau, \cdot) \mid \mu_\Lambda) = \mathrm{Ent}_{\mu_\Lambda}(p_t(\tau, \cdot))$

$$\left(p_t(\tau, \cdot) = \frac{P_t(\tau, \cdot)}{\mu_\Lambda(\cdot)} \overset{\text{rev}}{=} \frac{P_t(\cdot, \tau)}{\mu_\Lambda(\tau)} = P_t\left(\frac{\delta_\tau}{\mu_\Lambda(\tau)}\right) \right)$$

$$\leq e^{-\rho t} \underbrace{\mathrm{Ent}_{\mu_\Lambda}\left(\frac{\delta_\tau}{\mu_\Lambda(\tau)}\right)}_{= \log \frac{1}{\mu_\Lambda(\tau)}}$$

$$\leq e^{-\rho t} \log\left(\frac{1}{\mu_\Lambda^*}\right) \leq \varepsilon$$

IV] Ineg fonct pour le modèle d'Ising

. Resultat classique avec condition de Dobrushing

Loi conditionnel

$$\mu_k(\sigma_k \mid \sigma_{\bar{k}}) = \frac{\mu(\sigma)}{\mu(\sigma) + \mu(s_k(\sigma))}$$

$\sigma_k \in \{\pm 1\}$

$$\sigma_{\bar{k}} = (\sigma_i)_{i \neq k}$$

notation $\mu_k(\sigma_k \mid \sigma)$

Coefficient de Dobrushin $\quad k \neq l \in \Lambda$

$$C_{kl} = \sup_{\substack{\sigma, \tilde{\sigma} \\ \sigma_{\bar{l}} = \tilde{\sigma}_{\bar{l}}}} \underbrace{\| \mu_k(\cdot \mid \sigma) - \mu_k(\cdot \mid \tilde{\sigma}) \|_{T.V}}_{|\mu_k(1\mid\sigma) - \mu_k(1 \mid \tilde{\sigma})|}$$

$$= \frac{1}{2} \Big| \big(\mu_k(1\mid\sigma) - \mu_k(-1\mid\sigma)\big) - \big(\mu_k(1\mid\tilde{\sigma}) - \mu(-1\mid\tilde{\sigma})\big) \Big|$$

$$= \frac{1}{2} \Big| \tanh\Big(\sum_{i, i\neq k} M_{ik}\sigma_i\Big) - \tanh\Big(\sum_{i, i \neq k} M_{ik}\tilde{\sigma}_i\Big) \Big|$$

$$\leq \frac{1}{2} |M_{kl}| \underbrace{|\sigma_l - \tilde{\sigma}_l|}_{2} = |M_{kl}|$$

Condition de Dobrushin : $D = \sup_k \sum_{\ell \in \Lambda} C_{k\ell} < 1$

Thm : 92 Stroock Zegarlinski

$$\gamma^{(1)} \geq \text{cste}\,(1 - D)$$

$\left(\text{vrai si } \sup \sum_{\ell \in \Lambda} |M_{k\ell}| < 1 \right)$

pb : cette condition ne tient pas compte du désordre ferromagnétique

Preuve : décomposition spéciale martingale de l'entropie.

Thm : Bauerschmidt / Bodineau (2019)

$$\Delta(M) = \lambda_{max}(M) - \lambda_{min}(M) < 1$$

$$\gamma^{(4)} \geq 4\, \frac{1 - \Delta(M)}{1 + \Delta(M)}$$

Cette condition permet de considérer d'autres modèles

- Sherrington Kirkpatrick spin glass model

μ_Λ^ω aléatoire $\quad M^\omega = \beta H^\omega \quad$ β inverse de temp

H^ω : matrice sym à entrée gaussienne $\mathcal{N}(0, \frac{1}{N})$ $\quad N = |\Lambda|$

$\in$ GOE ensemble

$$\mathbb{E}\left(\sum_j |M_{ij}^{\omega}|\right) \approx \text{cte}\, \beta \sqrt{N} \quad (< 1 \ ?)$$

$$\gamma^{(1)}(\omega) > 0 \qquad \beta = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

<u>Resultat de matrices aléatoires</u>

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left[\Delta(H^{\omega}) \leqslant 4 + \varepsilon \right) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1$$

$$\Delta(M^{\omega}) = \beta \Delta(H^{\omega})$$

BB $\Rightarrow$ $\gamma^{(4)}(\omega) > 0$ dès que $4\beta < 1$.

$$\beta = O(1)$$

<u>Thm</u>: Eldan Koehler Zeitouni 2020

$$\lambda^{(1)} \geqslant 1 - \Delta(M)$$

Conséquence $\tau^{(1)}(\varepsilon) \leqslant \tau_2(4\varepsilon^2) \leqslant \frac{1}{2(1 - \Delta(M))}\left(\log \frac{1}{\mu_\Lambda^*} + \log \frac{1}{4\varepsilon^2}\right)$

$$\mu_\Lambda^* = \frac{1}{\sum_{\tilde{\sigma} \in \Lambda} e^{(\max(V(\sigma)) - V(\tilde{\sigma}))}}$$

$$\frac{1}{\mu_\Lambda^*} \leqslant 2^{|\Lambda|} e^{\max(\langle M\sigma, \sigma\rangle + \langle h, \sigma\rangle) + \max(\langle -M\sigma, \sigma\rangle - \langle h, \sigma\rangle)}$$

$$\leqslant 2^N e^{\Delta(M) N + 2 \sum_{i \in \Lambda} |h_i|}$$

$$\leqslant e^{\text{cte}\, N}$$

$$\tau^{(1)}(\varepsilon) < O(N)$$

<u>Dem</u>: Localisation stochastique.