

Processus Gamma bivariés

M. Roussignol, S. Mercier, C. Meier-Hirmer
SNCF - Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées



Groupe de travail - 29 mai 2009

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Modèle TRGL
- 3 Modèle TDIGL
- 4 Modèle CGL
- 5 Conclusion

Introduction

- **But** : proposer un modèle de dégradation croissante *bivarié*.
- Modèle de dégradation *univarié* usuel : processus **Gamma**
 processus marginaux de notre modèle = processus **Gamma**.
- On souhaiterait avoir :
 - ▶ une dépendance *positive* entre les processus marginaux,
 - ▶ une propriété de *vieillesse* pour les temps d'atteinte d'un seuil.

Processus de Lévy sur \mathbb{R}_+^2

- Transformée de Laplace de X_t :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_t}(x_1, x_2) &= \mathbb{E} \left(e^{-\left(x_1 X_t^{(1)} + x_2 X_t^{(2)}\right)} \right) \\ &= \exp \left(t \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left(e^{-(x_1 y_1 + x_2 y_2)} - 1 \right) \mu_X(dy_1 dy_2) \right),\end{aligned}$$

- μ_X est la mesure de Lévy du processus,
- μ_X caractérise le processus.

Processus de Lévy sur \mathbb{R}_+^2

Proposition

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un *processus de Lévy* sur \mathbb{R}_+^2 , avec $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$.

- On a :

$$[X_{t_2}^{(2)} | X_{t_1}^{(1)} > x_1] \succ_{sto} X_{t_2}^{(2)} \text{ pour tout } x_1 \geq 0 \text{ et } 0 < t_1 \leq t_2$$

(conséquence de [Bäuerle - Blatter - Müller 2007]),

- Si \mathcal{U} est un ensemble clos vers le haut (closed upper set), le temps d'atteinte de \mathcal{U} est *NBU* (New Better Than Used) :

$$[T_{\mathcal{U}} - t | T_{\mathcal{U}} > t] \prec_{sto} T_{\mathcal{U}} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

➡ bon candidat pour un modèle de *dégradation bivarié*.

Processus Gamma-Lévy

Définition

Un processus de Lévy bivarié dont les processus marginaux sont des processus Gamma de paramètres (a_1, b_1) et (a_2, b_2) est appelé processus Gamma-Lévy de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) .

Proposition

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus Gamma-Lévy bivarié de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) et soit E_1 la fonction exponentielle intégrale :

$$E_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \text{ pour } x > 0.$$

On pose $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$. Alors :

$$0 \leq \rho_{X_t} = \rho_X \leq \rho_{\max}(\alpha) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \min\left(\sqrt{\alpha} E_1(u_1), \frac{1}{\sqrt{\alpha}} E_1(u_2)\right) du_1 du_2.$$

Processus Gamma-Lévy

Définition

Un processus de Lévy bivarié dont les processus marginaux sont des processus Gamma de paramètres (a_1, b_1) et (a_2, b_2) est appelé processus Gamma-Lévy de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) .

Proposition

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus Gamma-Lévy bivarié de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) et soit E_1 la fonction exponentielle intégrale :

$$E_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \text{ pour } x > 0.$$

On pose $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$. Alors :

$$0 \leq \rho_{X_t} = \rho_X \leq \rho_{\max}(\alpha) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \min\left(\sqrt{\alpha} E_1(u_1), \frac{1}{\sqrt{\alpha}} E_1(u_2)\right) du_1 du_2.$$

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Modèle TRGL**
- 3 Modèle TDIGL
- 4 Modèle CGL
- 5 Conclusion

Processus TRGL (Trivariate Reduction Gamma-Lévy)

- $(Y_t^{(j)})_{t \geq 0}$: 3 processus Gamma indépendants de paramètres $(\alpha_j, 1)$.
- On pose :

$$\begin{cases} X_t^{(1)} = (Y_t^{(1)} + Y_t^{(3)}) / b_1 \\ X_t^{(2)} = (Y_t^{(2)} + Y_t^{(3)}) / b_2 \end{cases} \quad \text{où } b_1 > 0 \text{ et } b_2 > 0.$$

- Le processus $(X_t)_{t \geq 0} = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})_{t \geq 0}$ est alors un processus Gamma-Lévy de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) , avec

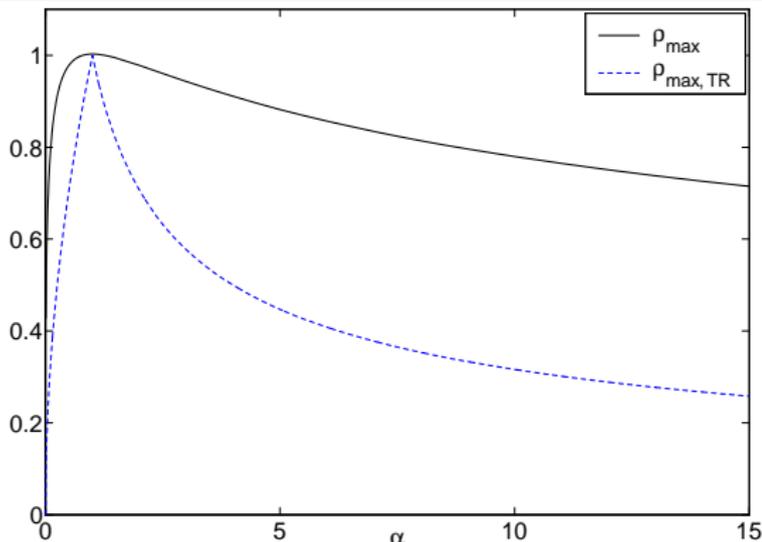
$$\begin{cases} a_1 = \alpha_1 + \alpha_3, \\ a_2 = \alpha_2 + \alpha_3. \end{cases}$$

- On l'appelle processus *Trivariate Reduction Gamma-Lévy* (TRGL).

Contrainte sur ρ_X

Proposition

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus **TRGL** de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) et $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$. On a alors : $\rho_X \leq \rho_{\max, TR}(\alpha) = \min\left(\sqrt{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) < \rho_{\max}(\alpha)$ pour $\alpha \neq 1$.



➔ Un processus **TRGL** ne permet donc **pas** de modéliser tout type de dépendance.

Estimation des paramètres

- Paramètres : $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1, b_2)$ ou $(a_1, b_1, a_2, b_2, \rho_X)$,
- Données accroissements indépendants :

$$\left(\Delta t_j = t_j - s_j, \Delta X_j^{(1)} = X_{t_j}^{(1)} - X_{s_j}^{(1)}, \Delta X_j^{(2)} = X_{t_j}^{(2)} - X_{s_j}^{(2)} \right)_{1 \leq j \leq n},$$

- Estimateurs empiriques,
- Estimateurs par maximum de vraisemblance.

Estimateurs empiriques

Estimateurs $(\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_2, \hat{\rho})$ de $(a_1, b_1, a_2, b_2, \rho_X)$:

$$\frac{\hat{a}_i}{\hat{b}_i} = \frac{\sum_{j=1}^n \Delta X_j^{(i)}}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j},$$

$$\frac{\hat{a}_i}{\hat{b}_i^2} = \frac{\sum_{j=1}^n \left(\Delta X_j^{(i)} - \frac{\hat{a}_i}{\hat{b}_i} \Delta t_j \right)^2}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j - \frac{1}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j} \sum_{j=1}^n (\Delta t_j)^2},$$

$$\hat{\rho} \frac{\sqrt{\hat{a}_1 \hat{a}_2}}{\hat{b}_1 \hat{b}_2} = \frac{\sum_{j=1}^n \left(\Delta X_j^{(1)} - \frac{\hat{a}_1}{\hat{b}_1} \Delta t_j \right) \left(\Delta X_j^{(2)} - \frac{\hat{a}_2}{\hat{b}_2} \Delta t_j \right)}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j - \frac{1}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j} \sum_{j=1}^n (\Delta t_j)^2}.$$

Estimation par maximum de vraisemblance

- Vraisemblance compliquée à écrire et à maximiser,
- En considérant $(\Delta Y_j^{(3)} = Y_{t_j}^{(3)} - Y_{s_j}^{(3)})_{1 \leq j \leq n}$ comme des données cachées, vraisemblance complète plus facile à écrire
  utilisation de l'algorithme EM,
- Estimation par maximum de vraisemblance sur les processus Gamma univariés marginaux des paramètres a_1, b_1, a_2, b_2 ,
- Avec l'algorithme EM deux méthodes :
 - ▶ estimer α_3 en prenant comme valeurs de a_1, b_1, a_2, b_2 les estimateurs obtenus sur les processus marginaux,
 - ▶ estimer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en prenant comme valeurs de b_1, b_2 les estimateurs obtenus sur les processus marginaux.

Estimation sur données simulées

Données : 500 accroissements

Résultats :

	Vraie valeur	Estimateur empirique 1	Estimateur empirique 2	Max vrais. univarié	algorithme EM	
					EM1	EM2
a_1	0.0330	0.0348	0.0344	0.0342	0.0347	—
b_1	13.5	14.38	14.22	14.14	—	—
a_2	0.0350	0.0362	0.0359	0.0357	0.0354	—
b_2	20	20.58	20.53	20.25	—	—
ρ	0.5296	0.5637	0.5941	—	0.5231	0.5214

Temps de maintenance préventive

- Pour $i = 1, 2$, $T^{(i)}$ le temps d'atteinte du seuil s_i :

$$T^{(i)} = \inf \left(t > 0 : X_t^{(i)} \geq s_i \right),$$

- Pour $\epsilon > 0$

- ▶ pour $i = 1, 2$: $\tau^{(i)} = \max \left(\tau \geq 0 : \mathbb{P}_{x_i} \left(T^{(i)} \leq \tau \right) < \epsilon \right)$,
- ▶ $\tau^U = \min \left(\tau^{(1)}, \tau^{(2)} \right)$,
- ▶ $\tau^B = \max \left(\tau \geq 0 : \mathbb{P}_{(x_1, x_2)} \left(\left\{ T^{(1)} \leq \tau \right\} \text{ ou } \left\{ T^{(2)} \leq \tau \right\} \right) < \epsilon \right)$.

Calcul de la fonction de répartition

- Pour la calcul de $\tau^{(i)}$:

$$\mathbb{P}_{x_i} \left(T^{(i)} > \tau \right) = \mathbb{P}_{x_i} \left(X_{\tau}^{(i)} < s_i \right) = F_{a_i \tau, 1} (b_i (s_i - x_i))$$

où $F_{a_i \tau, 1} (x)$ est la fonction de répartition de la distribution $\Gamma (a_i \tau, 1)$.

- Pour le calcul de τ^B :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(x_1, x_2)} \left(T^{(1)} > \tau, T^{(2)} > \tau \right) \\ &= \mathbb{P}_{(x_1, x_2)} \left(X_{\tau}^{(1)} < s_1, X_{\tau}^{(2)} < s_2 \right) \\ &= \int_0^{\min(b_1(s_1 - x_1), b_2(s_2 - x_2))} F_{\alpha_1 \tau, 1} (b_1(s_1 - x_1) - y_3) \\ & \quad F_{\alpha_2 \tau, 1} (b_2(s_2 - x_2) - y_3) f_{\alpha_3 \tau, 1} (y_3) dy_3. \end{aligned}$$

Exemples de temps de maintenance préventive

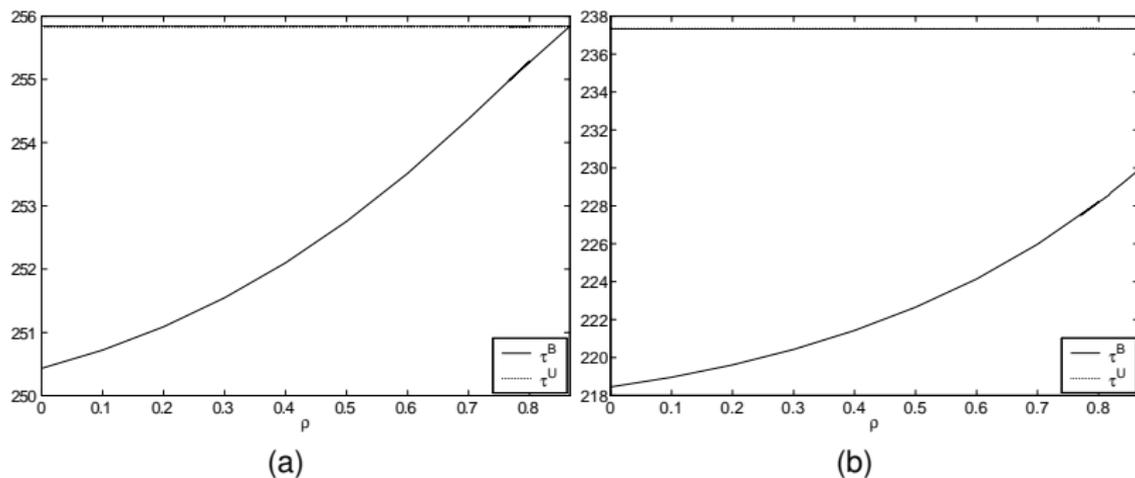


Figure: τ^B et τ^U en fonction de ρ

Application à la maintenance de voies SNCF (1)

- Deux indicateurs de détérioration sont mesurés régulièrement tous les km : **NL** (Nivellement Longitudinal) et **NT** (Nivellement Transversal).
- L'indicateur **NL** est déjà utilisé pour décider d'opérations de maintenance.
- L'évolution de **NL** a été modélisée par un processus Gamma (univarié) dont les paramètres ont été estimés.
- On dispose de deux indicateurs :
 modélisation de l'évolution du couple (**NL** , **NT**) par un processus TRGL .
- Estimation des paramètres du processus sur une section de la LVG Paris-Lyon par maximum de vraisemblance (algorithme EM) :

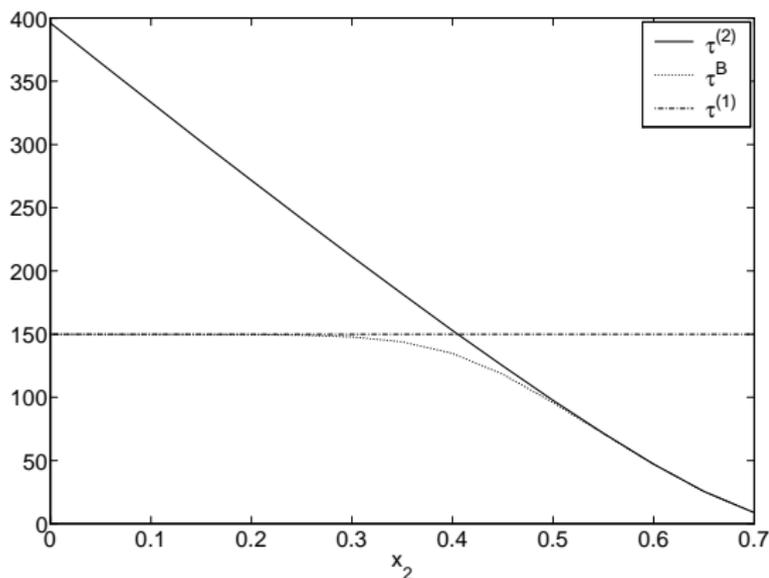
$$\hat{a}_1 = 0.0355; \hat{b}_1 = 19.19$$

$$\hat{a}_2 = 0.0387; \hat{b}_2 = 29.72$$

$$\hat{\rho} = 0.5262.$$

Application à la maintenance de voies SNCF (2)

- Seuils usuels : $s_1 = 0.9$ et $s_2 = 0.75$,
- $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ et τ^B en fonction de x_2 avec $x_1 = 0.4$ et $\varepsilon = 0.05$:



Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Modèle TRGL
- 3 Modèle TDIGL**
- 4 Modèle CGL
- 5 Conclusion

Notations

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus **GL** bivarié de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) .
 On note :

- μ_X : mesure de Lévy de $(X_t)_{t \geq 0}$,
- μ_i : mesure de Lévy de $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$, avec $\mu_i(dx_i) = a_i \frac{e^{-b_i x_i}}{x_i} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x_i) dx_i$,
- μ_{\perp} : mesure de Lévy d'un processus **GL** à composantes **indépendantes** :

$$\mu_{\perp}(dx_1, dx_2) = \mu_1(dx_1) \times \delta_0(dx_2) + \delta_0(dx_1) \times \mu_2(dx_2),$$

- U_i : fonction intégrale de queue de $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$, avec

$$U_i(x_i) = \int_{[x_i, +\infty[} \mu_i(dy) \text{ pour } x_i \in \mathbb{R}_+^*, U_i(0) = +\infty \text{ et } U_i(+\infty) = 0.$$

- μ_{\parallel} : mesure de Lévy d'un processus **GL** à composantes **complètement dépendantes** :

$$\mu_{\parallel}(dx_1, dx_2) = \mu_1(dx_1) \times \delta_{U_2^{-1}(U_1(x_1))}(dx_2) = \delta_{U_1^{-1}(U_2(x_2))}(dx_1) \times \mu_2(dx_2).$$

Modèle TDIGL

Définition

Soient $a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$ et $\tau \in [0, 1]$. Un processus de Lévy est appelé processus "**Tossed Dependent-Independent**" Gamma-Lévy (**TDIGL**) de paramètres $(a_1, b_1, a_2, b_2, \tau)$ si sa mesure de Lévy est donnée par :

$$\mu(dx_1, dx_2) = (1 - \tau) \mu_{\perp}(dx_1, dx_2) + \tau \mu_{\parallel}(dx_1, dx_2).$$

Proposition

Pour un processus **TDIGL** de paramètres $(a_1, b_1, a_2, b_2, \tau)$, on a :

$$\rho_X = \tau \times \rho_{\max}(\alpha) \text{ où } \alpha = \frac{a_1}{a_2}.$$

Modèle TDIGL

Définition

Soient $a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$ et $\tau \in [0, 1]$. Un processus de Lévy est appelé processus "**Tossed Dependent-Independent**" Gamma-Lévy (**TDIGL**) de paramètres $(a_1, b_1, a_2, b_2, \tau)$ si sa mesure de Lévy est donnée par :

$$\mu(dx_1, dx_2) = (1 - \tau) \mu_{\perp}(dx_1, dx_2) + \tau \mu_{\parallel}(dx_1, dx_2).$$

Proposition

Pour un processus **TDIGL** de paramètres $(a_1, b_1, a_2, b_2, \tau)$, on a :

$$\rho_X = \tau \times \rho_{\max}(\alpha) \text{ où } \alpha = \frac{a_1}{a_2}.$$

➡ permet de modéliser **tous** les ρ_X possibles.

Construction d'un TDIGL

Soient $(X_t^\perp)_{t \geq 0}$ et $(X_t^\parallel)_{t \geq 0}$ deux processus *GL* bivariés indépendants tels que :

- $(X_t^\perp)_{t \geq 0}$: composantes *indépendantes* de paramètres $((1 - \tau) a_1, b_1)$ et $((1 - \tau) a_2, b_2)$,
- $(X_t^\parallel)_{t \geq 0}$: composantes *complètement dépendantes* de paramètres $(\tau a_1, b_1)$ et $(\tau a_2, b_2)$.

Le processus $X_t = X_t^\perp + X_t^\parallel$ est alors un processus *TDIGL* de paramètres $(a_1, b_1, a_2, b_2, \tau)$.

Construction d'un TDIGL

Soient $(X_t^\perp)_{t \geq 0}$ et $(X_t^\parallel)_{t \geq 0}$ deux processus *GL* bivariés indépendants tels que :

- $(X_t^\perp)_{t \geq 0}$: composantes *indépendantes* de paramètres $((1 - \tau) a_1, b_1)$ et $((1 - \tau) a_2, b_2)$,
- $(X_t^\parallel)_{t \geq 0}$: composantes *complètement dépendantes* de paramètres $(\tau a_1, b_1)$ et $(\tau a_2, b_2)$.

Le processus $X_t = X_t^\perp + X_t^\parallel$ est alors un processus *TDIGL* de paramètres $(a_1, b_1, a_2, b_2, \tau)$.

➡ pour simuler un *TDIGL*, il suffit de savoir simuler un processus à composantes *complètement dépendantes*.

Simulations Monte Carlo

Théorème (Cont-Tankov 2004)

Soient $a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$. Pour $t \in [0, 1]$, on pose $Z_t = (Z_t^{(1)} Z_t^{(2)})$ avec

$$Z_t^{(i)} = \frac{1}{b_i} \sum_{n=1}^{+\infty} E_1^{-1} \left(\frac{S_n}{a_i} \right) \mathbf{1}_{[0,t]}(V_n) \text{ pour } i \in \{1, 2\}$$

où :

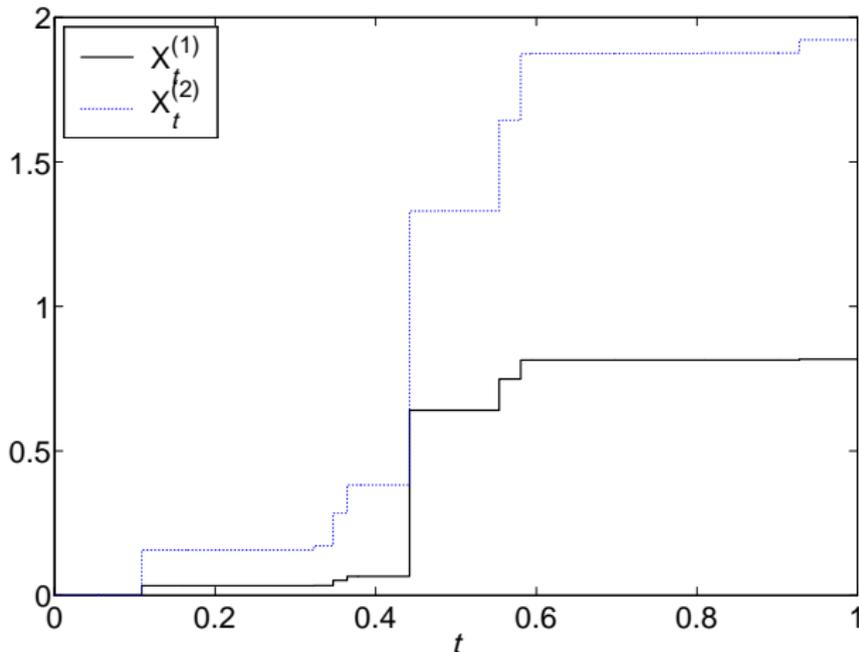
- $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$: suite de v.a.r. i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$,
- $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$: points d'un processus de Poisson standard, indépendant de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Alors, $(Z_t)_{t \in [0,1]}$ a la même loi qu'un processus GL tel que :

- composantes **complètement dépendantes**,
- paramètres marginaux : (a_1, b_1, a_2, b_2) .

Application : pour simuler, on ne garde que les termes tels que $S_n \leq M$, i.e. tels que $E_1^{-1} \left(\frac{S_n}{a_i} \right) \geq E_1^{-1} \left(\frac{M}{a_i} \right)$.

Un exemple de comp. complètement dépendantes



$a_1 = 1, a_2 = 2, b_1 = b_2 = 1$ ($\rho_X \simeq 0.9784$), $M = 10^3$ (avec $E_1^{-1}(M) \ll 10^{-323}$).

Estimation des paramètres

Paramètres : $(a_1, b_1, a_2, b_2, \tau)$ ou $(a_1, b_1, a_2, b_2, \rho_X)$

- **Estimateurs empiriques** : identiques à ceux proposés pour le modèle précédent,
- Pas de forme explicite de la vraisemblance,
- Autres estimateurs de meilleure qualité : **????**

Calculs numériques déterministes

- Calcul de $F_t(x_1, x_2) = \mathbb{P}_0 \left(X_t^{(1)} \leq x_1, X_t^{(2)} \leq x_2 \right)$?
- Equation de Chapman-Kolmogorov pour un processus de Lévy :

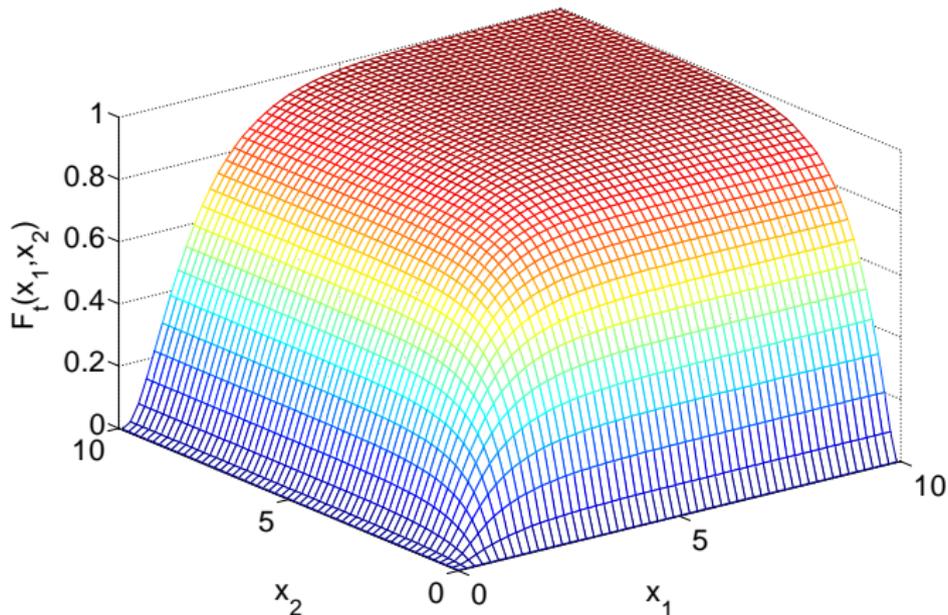
$$P_t f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + \int_0^t \iint_{\mathbb{R}_+^2 \setminus \{0,0\}} (P_s f(\mathbf{y}) - P_s f(\mathbf{0})) \mu_X(d\mathbf{y}) ds.$$

- En prenant $f(\mathbf{y}) = 1_{\{\mathbf{y} \leq \mathbf{x}\}}$ dans CK, on obtient :

$$F_t(\mathbf{x}) = 1 + \int_0^t \iint_{\mathbb{R}_+^2 \setminus \{0,0\}} (F_s(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - F_s(\mathbf{x})) \mu_X(d\mathbf{y}) ds.$$

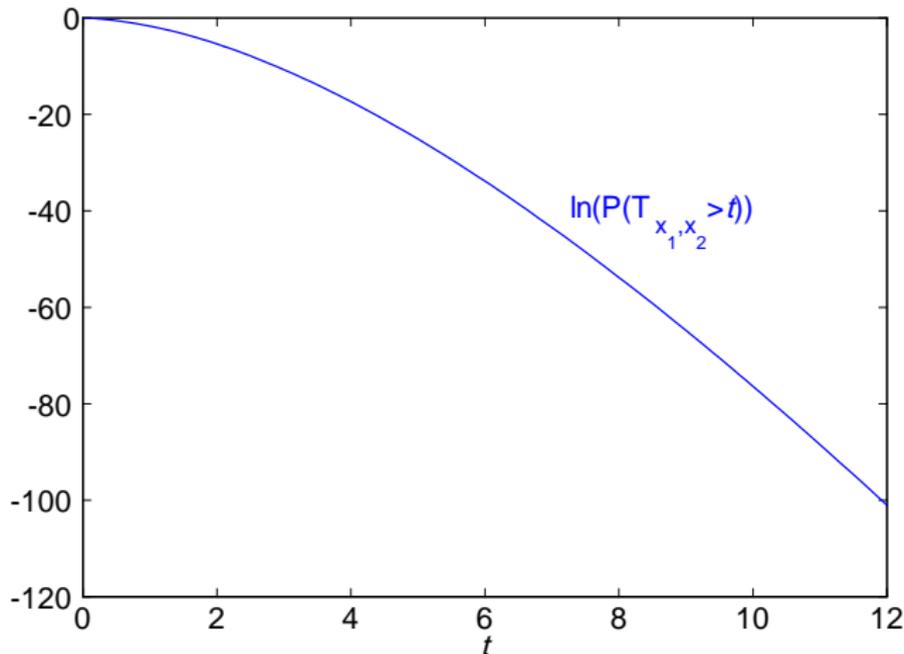
- On remplace μ_X par la mesure de Lévy d'un processus **TDIGL** et on discrétise l'équation.

Un exemple de calcul de fonction de répartition



Données : $a_1 = 1.2$, $a_2 = 1.7$, $b_1 = b_2 = 1$, $\tau = 0.5$ ($\rho_X \simeq 0.4968$).

Un exemple de fonction de survie de T_{X_1, X_2}



Données : $a_1 = 1.2$, $a_2 = 1.7$, $b_1 = b_2 = 1$, $\tau = 0.5$, $x_1 = 0.8$, $x_2 = 0.9$.

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Modèle TRGL
- 3 Modèle TDIGL
- 4 Modèle CGL**
- 5 Conclusion

Copule de Lévy

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus *GL* de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) . On note :

- U_X : fonction *intégrale de queue* de $(X_t)_{t \geq 0}$, avec :

$$U_X(x_1, x_2) = \int_{[x_1, +\infty[} \int_{[x_2, +\infty[} \mu_X(dy) \text{ pour tout } (x_1, x_2) \neq (0, 0),$$

$$U_X(x_1, \infty) = U_X(\infty, x_2) = 0 \text{ et } U_X(0, 0) = +\infty.$$

- F : *copule de Lévy* de $(X_t)_{t \geq 0}$ [Cont-Tankov 2004], avec

$$U_X(x_1, x_2) = F(U_1(x_1), U_2(x_2)) \text{ pour tout } (x_1, x_2) \in [0, \infty]^2,$$

où U_i est la fonction intégrale de queue de $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$.

Définition du processus CGL

Définition

Soient $a_1, b_1, a_2, b_2, \theta > 0$. Un processus est appelé processus *Clayton-Gamma-Lévy (CGL)* de paramètres $(a_1, b_1, a_2, b_2, \theta)$ si c'est un processus *GL* de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) et de copule de Lévy F_θ , avec

$$F_\theta(u_1, u_2) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta}\right)^{-\frac{1}{\theta}} \text{ pour tout } (u_1, u_2) \in [0, +\infty]^2$$

(copule de Clayton-Lévy de paramètre θ).

Définition du processus CGL

Définition

Soient $a_1, b_1, a_2, b_2, \theta > 0$. Un processus est appelé processus **Clayton-Gamma-Lévy (CGL)** de paramètres $(a_1, b_1, a_2, b_2, \theta)$ si c'est un processus **GL** de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) et de copule de Lévy F_θ , avec

$$F_\theta(u_1, u_2) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta}\right)^{-\frac{1}{\theta}} \text{ pour tout } (u_1, u_2) \in [0, +\infty]^2$$

(copule de Clayton-Lévy de paramètre θ).

Propriété : $F_\theta \rightarrow F_{\parallel}$ quand $\theta \rightarrow +\infty$ et $F_\theta \rightarrow F_{\perp}$ quand $\theta \rightarrow 0^+$

 permet de modéliser **tous** les ρ_X possibles.

Processus CGL

- **Estimation des paramètres** : même situation que pour processus TDIGL,
- **Calculs numériques** par discrétisation de l'équation de Chapman-Kolmogorov,
- **Simulations de Monte-Carlo** par algorithme de [Cont-Tankov 2004] modifié.

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Modèle TRGL
- 3 Modèle TDIGL
- 4 Modèle CGL
- 5 Conclusion**

Conclusion

On a proposé trois modèles de *dégradation bivariable* :

- modèle **TRGL** (Trivariate Reduction GL),
 - ▶ points forts : simplicité et facilité d'interprétation,
 - ▶ point faible : dépendance réduite,
- modèle **TDIGL** (Tossed Dependent-Independent GL),
 - ▶ point fort : permet de modéliser n'importe quel ρ_X ,
 - ▶ point faible : difficultés pour estimer les paramètres,
- modèle **CGL** (Clayton GL),
 - ▶ point fort : permet de modéliser n'importe quel ρ_X ,
 - ▶ point faible : difficultés pour estimer les paramètres.

➡ Problèmes :

- Estimation des paramètres des processus TDIGL et CGL ?
- Choix entre ces différents modèles ?