

**Une nouvelle méthode de
Monte-Carlo Accélérée :
simulation directionnelle
adaptative avec stratification
de l'espace des directions.**

GTR UPEMLV : 29/05/2009

J. Garnier, M. Munoz Zuniga

[miguel-externe.munoz-zuniga@edf.fr]

E. Remy, E. de Rocquigny, A. Arnaud

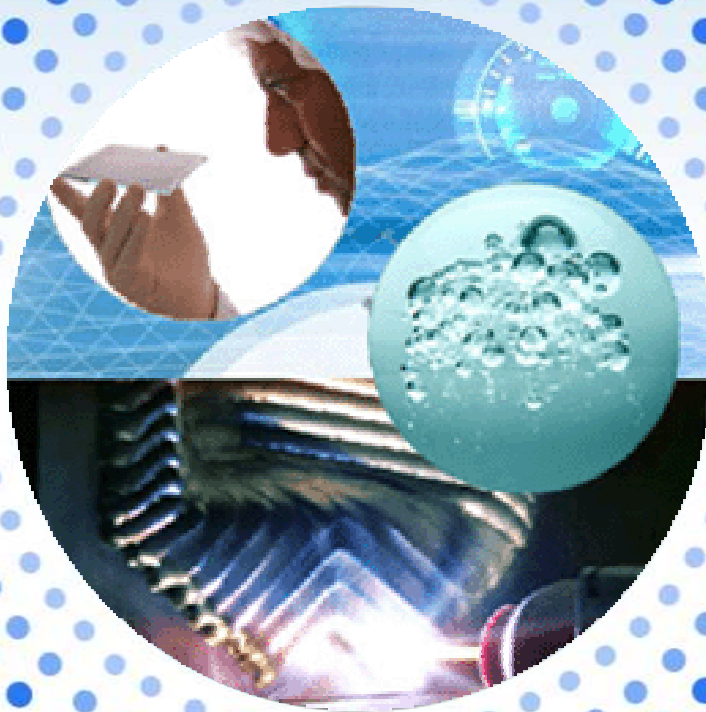




Table des matières (1/2)

1. Tenants et Aboutissants

1.1 Objectifs du travail de thèse

1.2 Axes de présentation

2. Contexte

2.1 Exemples de structures complexes à défaillance catastrophique

2.2 Cas de la centrale nucléaire

2.3 La cuve : un composant essentiel sous fortes contraintes

2.4 Problème type cuve

3. Les bases

3.1 Méthodes MC accélérées : bref aperçu

3.2 Stratification

3.3 Passage à l'espace gaussien

3.4 Simulation Directionnelle (SD)



Table des matières (2/2)

4. Stratification directionnelle adaptative

4.1 Illustration Graphique

4.2 Optimisation du nombre de tirages par strate

4.3 Tirages directionnelles 2-adaptatifs

4.4 Résultats Numériques

5. Perspectives



Tenants et Aboutissants



1.1 Objectifs

Concevoir et développer mathématiquement des méthodes de simulations stochastiques :

- Robustes (Intervalles de confiances)
- Rapides (Modèle à temps de calcul élevé)
- Adaptées à l'estimation de faibles probabilités

Dans le but :

- D'estimer efficacement la probabilité de défaillance de structures « fiables mais sensibles » d'unités de production d'électricité (la cuve d'une centrale nucléaire)
- De réutiliser cette méthode sur d'autres composants ou problématiques



Contexte

- 1) Composant complexe à défaillance catastrophique
- 2) Cuve de la centrale nucléaire
- 3) Présentation du problème
- 4) Présentation de notre réponse



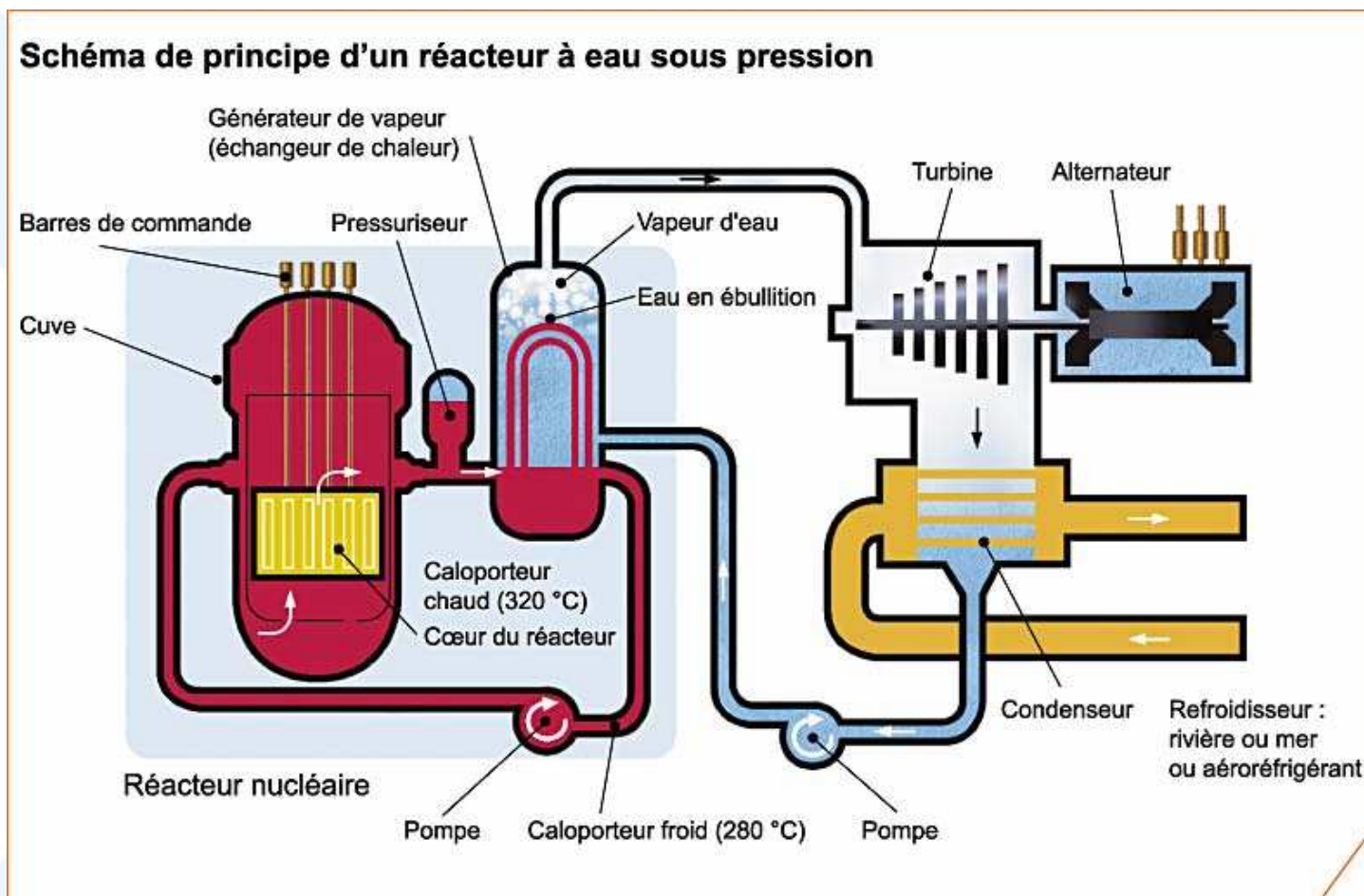
2.1 Exemples de structures complexes à défaillance catastrophique



Existence de multiples structures complexes à défaillance aux conséquences catastrophiques : Jumbo Jet, barrage, plate-forme marine, centrale nucléaire...

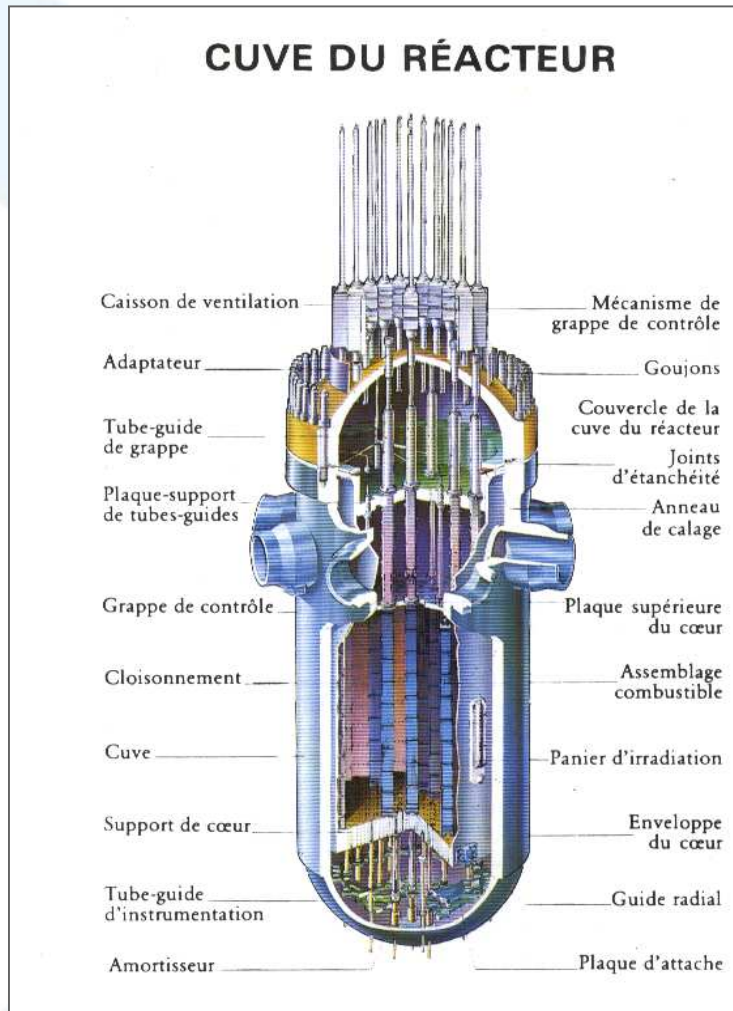


2.2 Cas de la centrale nucléaire





2.3 La cuve : un composant essentiel sous fortes contraintes



Situation normale :

- Contrainte de pression : 155 bar
- Irradiation de la cuve

Situation extrême :

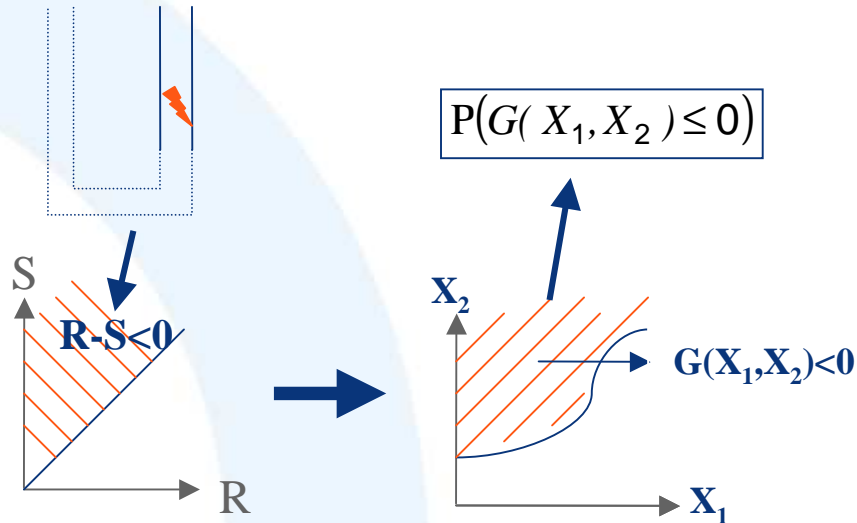
- Micro-défaut de fabrication
- Choc thermique : injection de liquide de refroidissement à environ 10°C dans un liquide à environ 300°C

Quelles est la probabilité de défaillance dans ce cas extrême ?

Quelles sont les caractéristiques de ce genre de problèmes ?



2.4 Problèmes type cuve



500 à 1000 appels à la fonction maximum

X_1, \dots, X_p : variables en jeu dans l'événement menant à la défaillance

Proba. de défaillance = $P(G(X_1, \dots, X_p) \leq 0)$

$$P_f = P(G(X) \leq 0) = E(\mathbf{1}_{G(X) \leq 0}) = \int \mathbf{1}_{G(x) \leq 0} f_X(x) dx$$

Pour la cuve :

- le modèle physique est complexe
- la défaillance est un événement rare (G est monotone par rapport à certaines variables)

- Estimation contrôlée de faibles probabilités sur des modèles physiques complexes -



2.5 Axes de la présentation

Présentation d'une nouvelle méthode de simulation présentant :

- Les avantages de la méthode de simulation directionnelle et de la méthode de stratification
- Les avantages d'une méthode adaptative à 2 étapes non-séquentielle permettant une parallélisation partielle
- Des résultats avec contrôle sur l'erreur d'estimation



Les Bases

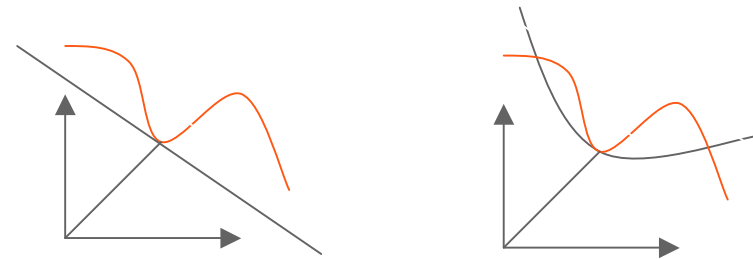
- 1) Méthodes FORM-SORM
- 2) Méthode de Monte Carlo standard
- 3) Méthodes de Monte Carlo accélérées
- 4) Méthode de Stratification
- 5) Méthode de Simulation Directionnelle



3.1 Méthodes FORM-SORM

• Méthodes analytiques : FORM-SORM

- Passage espace Gaussien (transformation de Rosenblatt)
- Recherche design point
- Approximation



Analyse :

- Temps de calcul raisonnable
- Efficacité dépend de la géométrie de la surface de défaillance
- Pas de contrôle de l'erreur
- Problème lié à la recherche du design point (convergence de l'algorithme non garantie)
- Problème lié à l'existence de plusieurs design points

- Estimation contrôlée de faibles probabilités sur des modèles physiques complexes -



3.2 Méthode de Monte Carlo standard

1) La loi forte des grands nombres

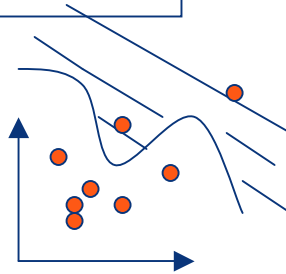
$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{G(X_i) \leq 0} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} E(\mathbf{1}_{G(X_i) \leq 0}) = P_f$$

$$\text{Var}(\hat{P}_f) = \frac{1}{N} P_f (1 - P_f)$$

2) Théorème centrale limite

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{G(X_i) \leq 0} - E[\mathbf{1}_{G(X_i) \leq 0}] \right) \xrightarrow{\text{Loi}} N(0,1)$$

$$\sigma^2 = \text{Var}[\mathbf{1}_{\{G(z) \leq 0\}}] = P_f (1 - P_f)$$



Intervalle de confiance

$$\left[\hat{P}_f^N - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{N}}; \hat{P}_f^N + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right]$$

Analyse :

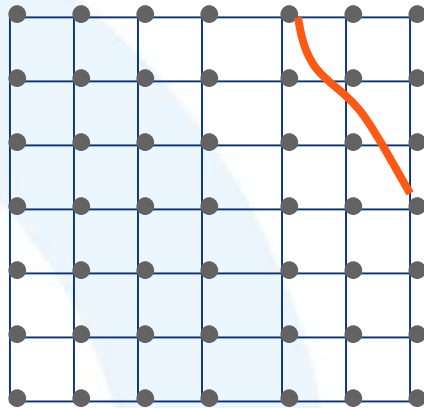
- Pas d'hypothèse de régularité
- Contrôle de l'estimation
- Temps de calcul proportionnel au nombre de tirages
- Si $P_f = 10^{-k}$ besoin de $N = 10^{k+2}$ tirages pour avoir un coefficient de variation de 10% (k suffisamment grand)

- Estimation contrôlée de faibles probabilités sur des modèles physiques complexes -

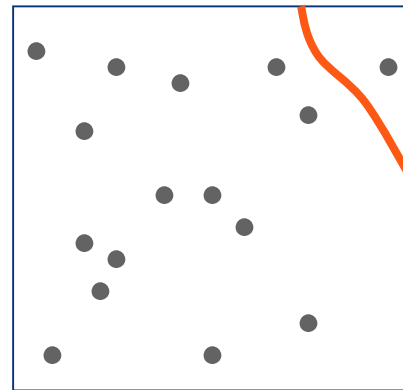


3.1 Méthodes MC accélérées : bref aperçu

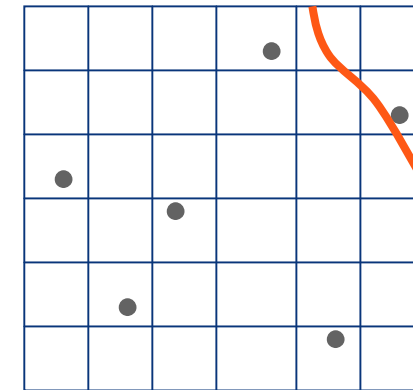
Tirage sur maillage



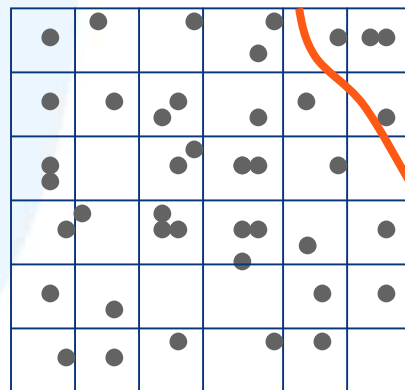
Monte Carlo standard



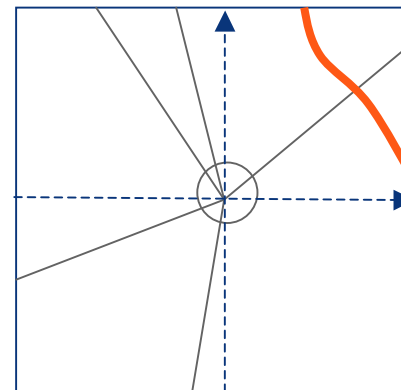
Hypercube Latin



Stratification



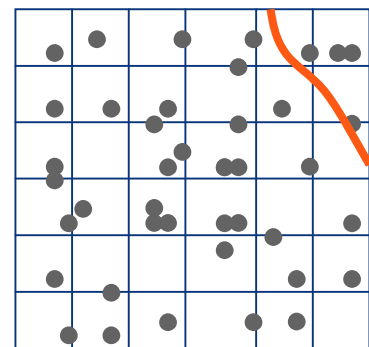
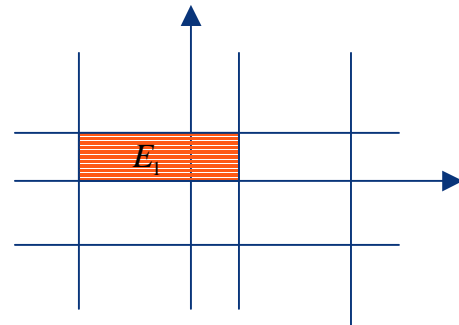
Simulation directionnelle





3.2 Stratification

$$R^k = \bigcup_{i=1}^m E_i$$



$$P(G(X) \leq 0) = E(1_{G(X) \leq 0})$$

$$I = E(F(X)) = \sum_{i=1}^m \underbrace{E(F(X) | X \in E_i)}_{I_i} \times \underbrace{P(X \in E_i)}_{p_i}$$

$$I = \sum_{i=1}^m p_i I_i$$

Estimateur

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^m p_i \hat{I}_i$$

$$\hat{I}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} F(X_j^{(i)})$$

$$\sum_{i=1}^m n_i = n$$

Nombre de tirages total

Problème

Déterminer le nombre de simulations par strate optimum pour que la variance de l'estimateur soit minimum

Solution

$$n_i = n \frac{p_i \sigma_i}{\sum_{j=1}^m p_j \sigma_j}$$

$$\sqrt{\text{Var}(F(X^{(i)}))}$$





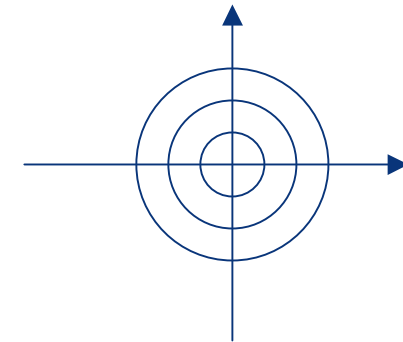
3.3 Passage à l'espace gaussien

P_f Transformation de Rosenblatt
→
Espace gaussien invariant par rotation

$$P_f = P(g(U) \leq 0) = \int 1_{g(u) \leq 0} \varphi_n(u) du$$

Densité gaussienne centrée réduite n-dimensionnelle

$G \xrightarrow{\text{Transformation}} g$

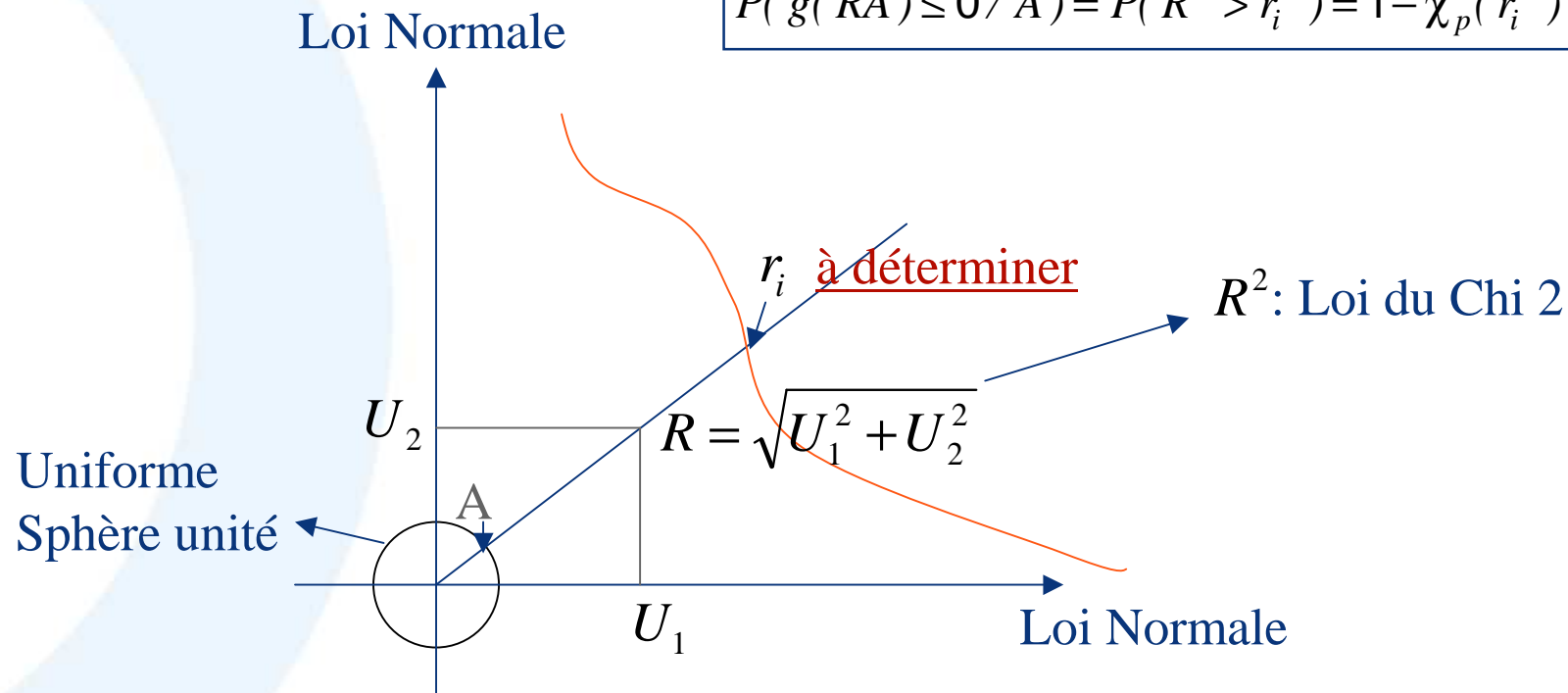




3.4 SD : la méthode classique (1/2)

On se place dans l'espace gaussien, puis on utilise un autre point de vue pour estimer P_f

$$P(g(RA) \leq 0 / A) = P(R^2 > r_i^2) = 1 - \chi_p^2(r_i^2)$$



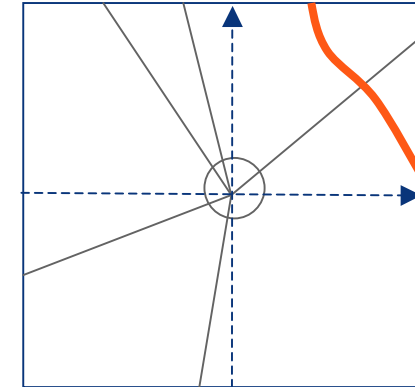


3.6 Méthode de Simulation Directionnelle : la méthode classique (2/2)

Ce qui donne le nouvel estimateur :

$$\theta_{SD} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(g(RA_i) \leq 0 / A_i)$$

Sous réserve de savoir calculer ce terme



Graphiquement

Réduction : $Var(\theta_{SD}) \leq Var(\theta_{MC})$

Conclusion :

1. Réduction de variance par rapport à Monte Carlo standard
2. Estimateur de la variance de l'estimateur

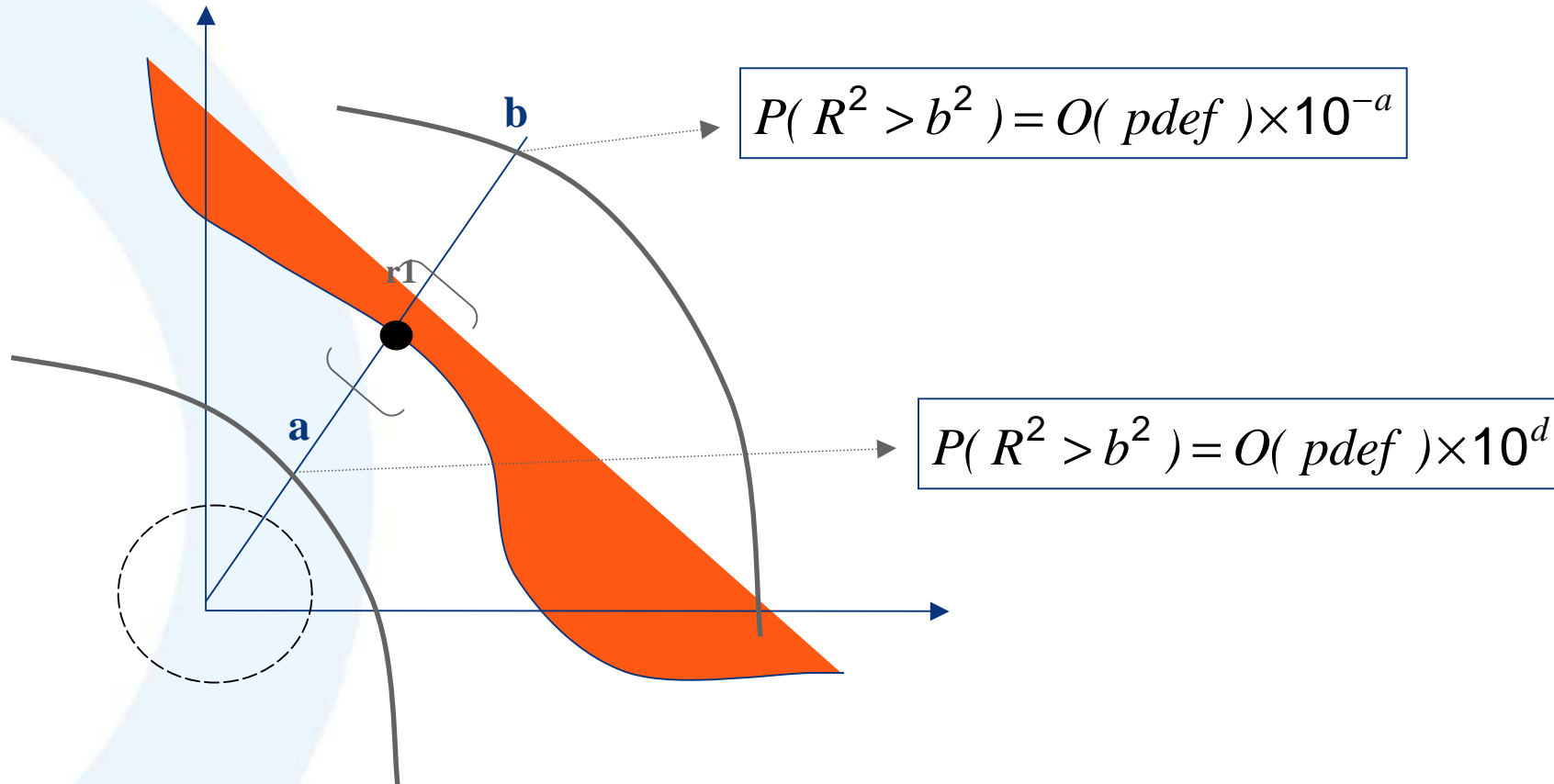
Mais des erreurs sont commises lors de la recherche des zéros

➤ Etude menée de l'impact sur les estimateurs (Cf. Annexe)



Recherche zéros : Remarque cercles limites

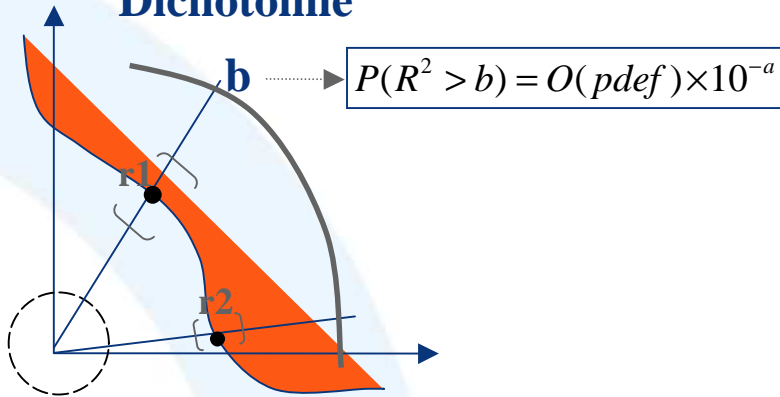
Dichotomie





Recherche zéros : paramétrage s

Dichotomie



SI :

$$k_i \geq \frac{\ln((b-a)|p-1-b^2|/b)}{2\ln(2)} \quad (*)$$

$$p \in [2,8]$$

$$pdef \leq 10^{-3}$$

$$|\theta_{SD}^\varepsilon - P_f| \leq \frac{c}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{2k_i+2}}$$

Biais de l'estimateur intégrant les erreurs commises lors de la recherche de zéros

$$|Var(\theta_{SD}^\varepsilon) - Var(\theta_{SD})| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{(\psi(r_i^2)br_i)^2}{3 \times 2^{2(k_i-1)}} (1 + \delta)$$

Optimisation :

k_i = k-ième étape
i-ième direction

$$\begin{cases} \min_{k_i \geq 0} \sum_{i=1}^m k_i \\ S.C \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{(\psi(r_i^2)br_i)^2}{3 \times 2^{2(k_i-1)}} \leq s \end{cases}$$

Résolution

$$k_i^{opt} = f(r_i)$$

$$f(r) = \ln \left(\frac{(\psi_p(r^2)r(b-a))^2}{3ns} \right) / 2\ln(2)$$

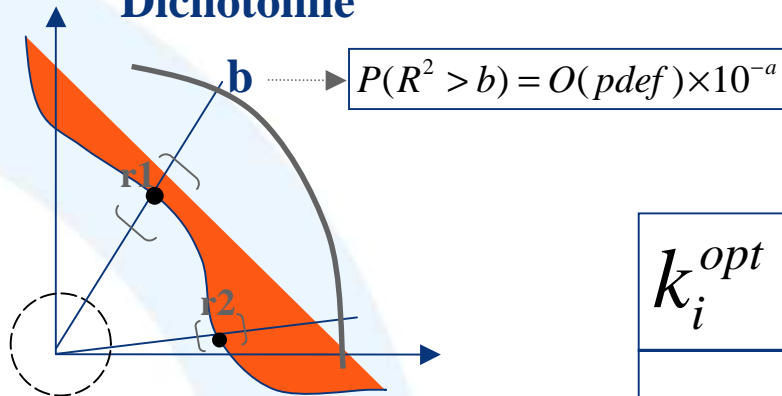
k_i^{opt} doit vérifier (*)

$$s \leq \frac{\Psi_p(b^2)^2 \times b^4}{3n|p-1-b^2|^2}$$



Annexe : résultats recherche de zéros

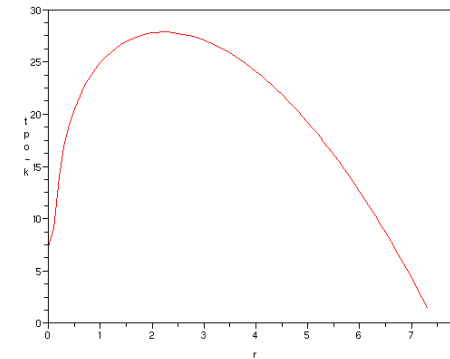
Dichotomie



k_i = k-ième étape
dichotomie dans
i-ième direction

$$k_i^{opt} = f(r_i)$$

$$f(r) = 1 + \frac{\ln\left(\frac{(\psi(r^2)br)^2}{3ns}\right)}{2\ln(2)}$$

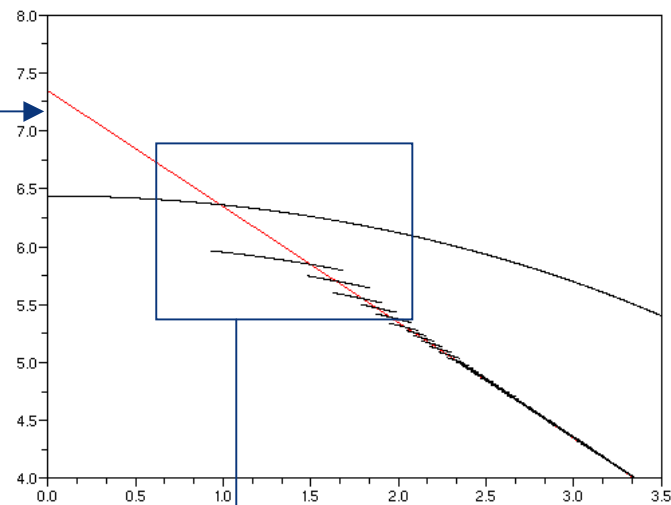
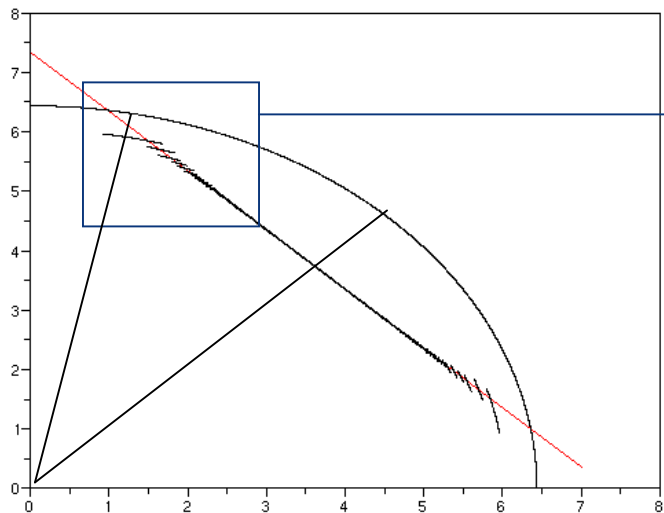


$$r_i \in [A_{k_i}, B_{k_i}] \Rightarrow k_i^{opt} \in [\min(f(A_{k_i}), f(B_{k_i})), \max(f(A_{k_i}), f(B_{k_i}))]$$

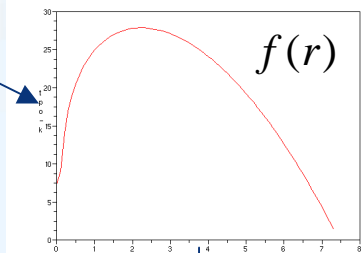
Critère d'arrêt : $k_i > \max(f(A_{k_i}), f(B_{k_i}))$



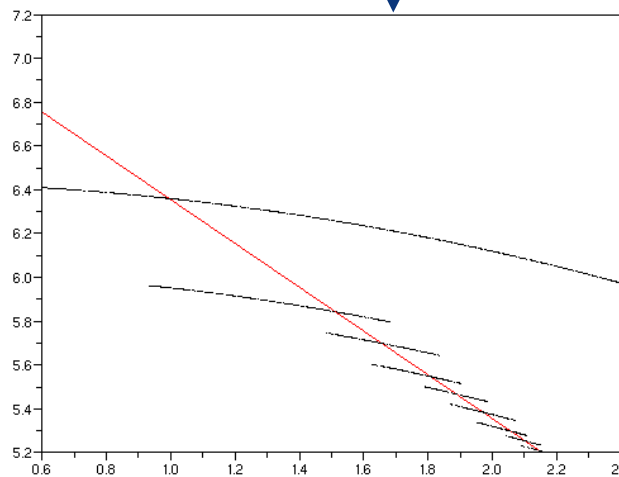
Annexe : résultats recherche de zéros



$p = 10$
 $P_f = 10^{-6}$
 $n = 10000$
 $r = 4b/5$



$$k_{opt}(r) = 12$$



$p=2$
 $p_f=10^{-7}$
 $n=10000$

Stratification Directionnelle Adaptative



- 1) Illustration graphique du principe
- 2) Expression du problème et optimisation
- 3) Présentation générale de 2-SDA
- 4) Étude des estimateurs proposés
- 5) Choix des estimateurs pertinents
- 6) Généralisation : L-SDA



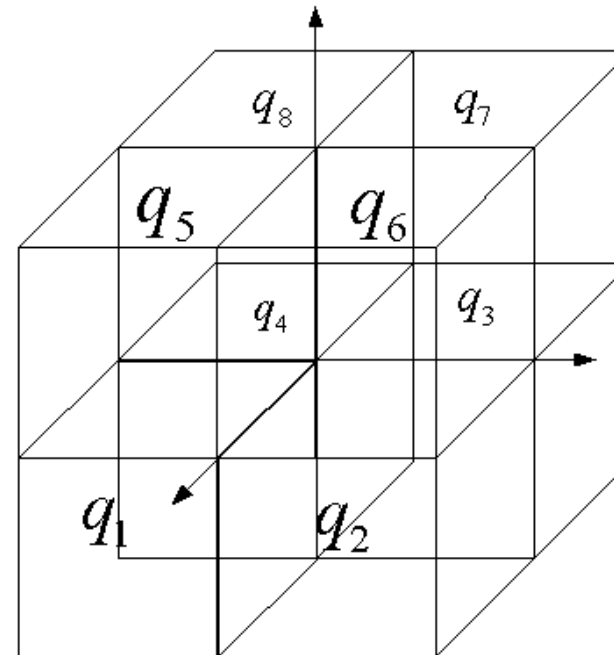
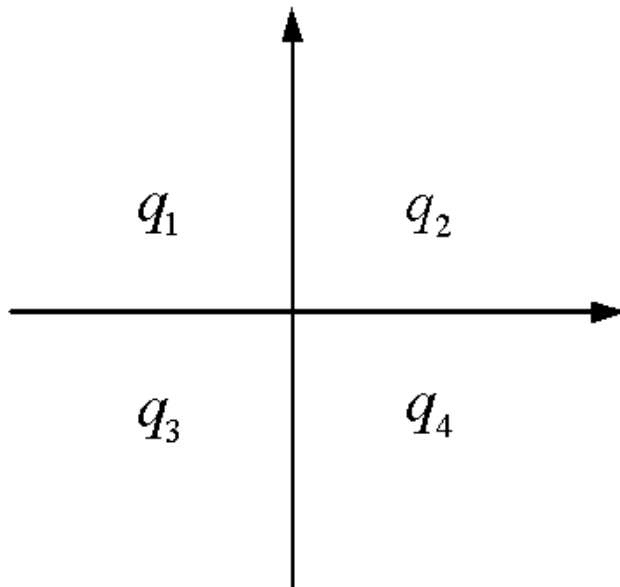
4.1 Illustration graphique

Nombre de quadrants :

$$m = 2^p$$

Nombre de tirages

$$n$$



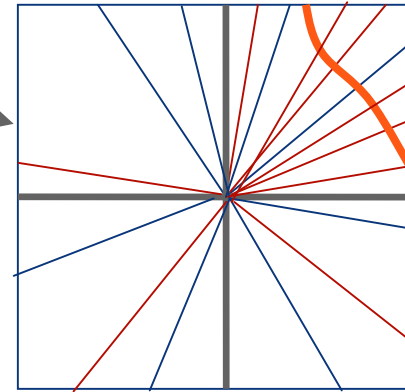
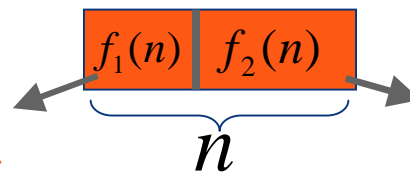
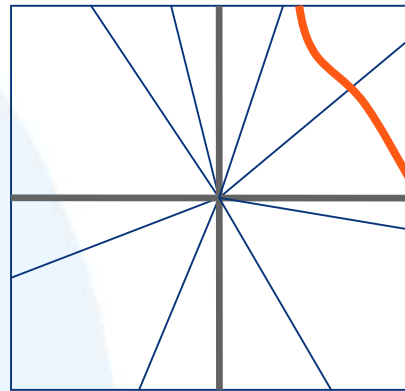


4.1 Illustration graphique

Étape 1 : Stratification directionnelle
(par quadrant)

Étape 2 : Stratification directionnelle adaptative

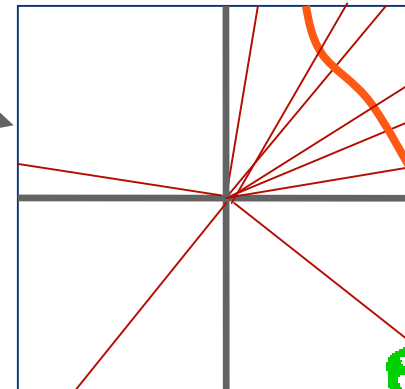
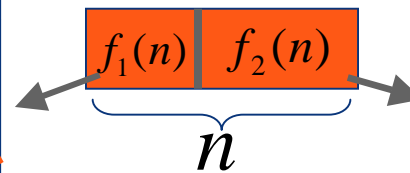
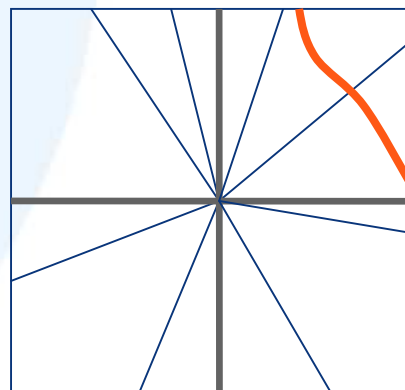
Avec recyclage



Étape 1 : Stratification directionnelle
(par quadrant)

Étape 2 : Stratification directionnelle adaptative

Sans recyclage





4.2 Stratification dans l'espace directionnel (1/4)

Application :

$$F(U) = \mathbf{1}_{G(U) \leq 0}$$

$$I = E(F(U)) = E \left[F \left(\underbrace{\|U\|}_{R} \underbrace{\frac{U}{\|U\|}}_{A} \right) \right] = E[F(RA)]$$

$R : R^2 \approx \chi_p^2$ $A \approx U(S_p)$

$$= \sum_{i=1}^m \underbrace{P(A \in q_i)}_{\rho_i} \times E[F(RA^i)]$$

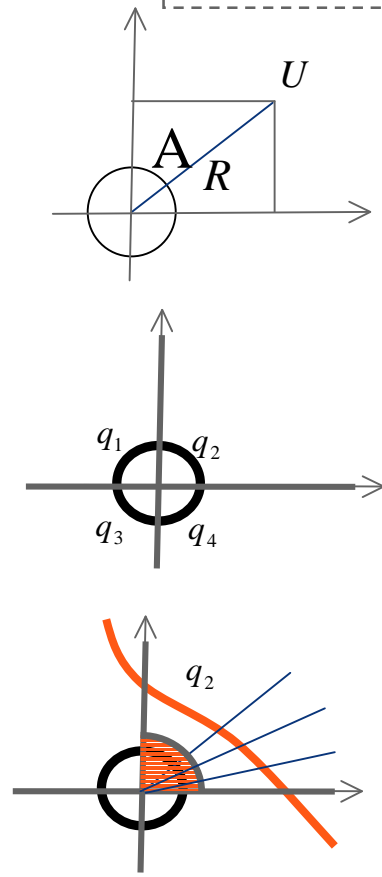
$A^i \approx \ell(A|A \in q_i)$

$$= \sum_{i=1}^m \rho_i E[E(F(RA_i) | A_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^m \rho_i E(\xi(A^i))$$

Il faut être capable de calculer ce terme

$$\sum_{i=1}^m n_i = n$$



$$\hat{I} = \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \xi(A_j^i)$$

$$E(\hat{I}) = I$$

$$Var(\hat{I}) = \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i^2 v_i}{n_i}$$

$$v_i = Var(\xi(A_j^i))$$

[Table des matières](#)





4.2 Estimateurs proposés (2/4)

Avec recyclage :

$$\hat{I}_r^{2SDA} = \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i}{f_1(n)w_i + f_2(n)\tilde{W}_i} \sum_{j=1}^{f_1(n)w_i + f_2(n)\tilde{W}_i} \xi(A_j^i)$$

Sans recyclage :

$$\hat{I}_{nr}^{2SDA} = \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i}{f_2(n)\tilde{W}_i} \sum_{j=1}^{f_2(n)\tilde{W}_i} \xi(A_j^i)$$



4.2 Optimisation du nombre de tirages par strate (3/4)

On se donne a priori m réels w_i tels que $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ et on réalise $\lfloor nw_i \rfloor$ tirages dans le quadrant i

Problème
⇒
⇒

Déterminer le nombre de simulations par strate optimum pour que la variance de l'estimateur soit minimum

$$\sigma^2(w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i^2 \sigma_i^2}{w_i}$$

Résolution

$$\sigma_{opt_1}^2 = \left(\sum_{i=1}^m \rho_i \sigma_i \right)^2$$

Variance minimum associée

$$w_i^{opt_1} = \frac{\rho_i \sigma_i}{\sum_{j=1}^m \rho_j \sigma_j}$$

Enfinement : $\sigma_{opt_1}^2 \leq \sigma_{MC}^2$

Résultat sur la stratification et sur la simulation directionnelle



4.2 Optimisation du nombre de tirages par strate (4/4)

On se donne a priori m réels w_i tels que $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ et on réalise $\lfloor nw_i \rfloor$ tirages dans le quadrant i

Problème

Déterminer le nombre de simulations par strate optimum pour que la variance de l'estimateur soit minimum

$$\sigma^2(w) = \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i^2 \sigma_i^2}{f_1(n)\beta_i + f_2(n)w_i}$$

Résolution

$$w_i^{opt_2} = \begin{cases} 0 & i \in K \\ \frac{\rho_i \sigma_i}{\sum_{j \in K^c} \rho_j \sigma_j} \left(1 + \frac{f_1(n)}{f_2(n)} \sum_{j \in K^c} \beta_j \right) - \frac{f_1(n)}{f_2(n)} \beta_i & i \in K^c \end{cases}$$

Variance minimum associée

$$\sigma_{opt_2}^2 = \sum_{i \in K} \frac{\rho_i^2 \sigma_i^2}{f_1(n)\beta_i} + \frac{1}{\left(f_2(n) + f_1(n) \sum_{i \in K^c} \beta_i \right)} \left(\sum_{i \in K^c} \rho_i \sigma_i \right)^2$$

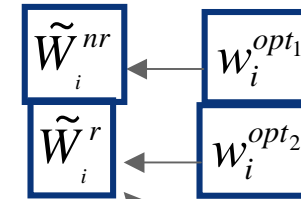
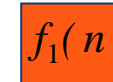
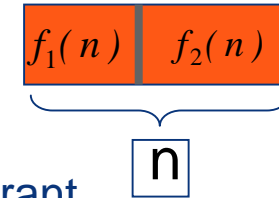
Finalemment :

$$\sigma_{opt_1}^2 \leq \sigma_{opt_2}^2$$



4.3 Stratification directionnelle 2-adaptative

- (1) On commence par choisir $f_1(n)$ et le pourcentage de tirages par quadrant w_i a priori
- (2) On réalise un premier jeu de simulations dans chaque quadrant avec les $\lfloor f_1(n)w_i \rfloor$ premiers tirages par quadrant
- (3) On estime la proportion de tirages optimum par strate \tilde{W}_i avec les $\lfloor f_1(n)w_i \rfloor$ premiers tirages
- (4) On estime la probabilité de défaillance par stratification directionnelle classique avec les \tilde{W}_i estimés



$$\tilde{V}_i = \frac{1}{f_1(n)w_i} \sum_{j=1}^{f_1(n)w_i} \xi^2(A_j^i) - \left(\frac{1}{f_1(n)w_i} \sum_{j=1}^{f_1(n)w_i} \xi(A_j^i) \right)^2$$

Ici se pose la question du recyclage ou non recyclage des $f_1(n)$ premières simulations : plusieurs estimateurs sont proposés



4.4 Étude estimateur avec recyclage (1/4)

Avec recyclage :

$$\hat{I}_r^{2SDA} = \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i}{f_1(n)w_i + f_2(n)\tilde{W}_i} \frac{f_1(n)w_i + f_2(n)\tilde{W}_i}{\sum_{j=1}^m \xi(A_j^i)}$$

Estimateur biaisé

$$B(\hat{I}_1^{2SDA}) = f_B(w^{opt}, v, \rho, m_1, m_2, m_3) = -\sum_{i=1}^m \frac{\rho_i f_2(n) c [m_{3,i} - 3m_{1,i}m_{2,i} + 2m_{1,i}^3]}{(f_1(n)w_i + f_2(n)w_i^{opt2})^2 \sigma_i} + R$$

$$\approx \frac{1}{\sigma_i}$$

Variance conditionnelle
aux premiers tirages

$$Var(\hat{I}_r^{2SDA} | A_{n_1:n_m}) = \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i^2 \sigma_i^2}{f_1(n)\beta_i + f_2(n)\tilde{W}_i^r}$$



4.4 Étude estimateur avec recyclage (2/4)

Résultat asymptotique :

$$f_1(n) = o(f_2(n))$$

$$\sqrt{n} \left(\hat{I}_r^{2SDA} - I \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{N}(0, \sigma_{opt_1}^2)$$

Résultat asymptotique :

$$f_1(n) = O(f_2(n)) = \gamma n$$

$$\sqrt{n} \left(\hat{I}_r^{2SDA} - I \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{N}(0, \sigma_{opt_1}^2)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \\ w_i^{opt_2} > \gamma w_i$$

$$\sqrt{n} \left(\hat{I}_r^{2SDA} - I \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{N}(0, \sigma_{opt_2}^2)$$



4.4 Étude estimateur sans recyclage (3/4)

Sans recyclage :

$$\hat{I}_{nr}^{2SDA} = \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i}{f_2(n)\tilde{W}_i} \sum_{j=1}^{f_2(n)\tilde{W}_i} \xi(A_j^i)$$

Estimateur non biaisé :

$$B(\hat{I}_{nr}^{2SDA}) = 0$$

Variance conditionnelle :

$$\text{Var}(\hat{I}_{nr}^{2SDA} | A_{n_1:n_m}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i^2 \sigma_i^2}{\tilde{W}_i^{nr}}$$



4.4 Étude estimateur avec recyclage (4/4)

Résultat asymptotique

$$f_1(n) = o(f_2(n))$$

$$\sqrt{n} \left(\hat{I}_{nr}^{2SDA} - I \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{N}(0, \sigma_{opt_1}^2)$$

Résultat asymptotique

$$f_1(n) = O(f_2(n)) = \gamma n$$

$$\sqrt{n} \left(\hat{I}_{nr}^{2SDA} - I \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{N}\left(0, \frac{\sigma_{opt_1}^2}{1-\gamma}\right)$$



4.5 Choix des estimateurs pertinents

Conclusion :

L'**estimateur avec recyclage est biaisé** avec un biais difficile à corriger
L'ordre de grandeur du nombre de simulations réalisable étant faible, on ne peut considérer ce biais négligeable

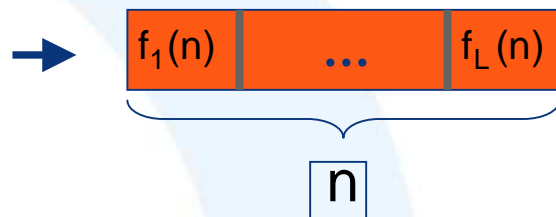
Il paraît donc plus raisonnable d'**utiliser dans notre cadre l'estimateur sans recyclage**
Nous perdrons certes un facteur sur la variance, mais celui-ci pourra être négligeable au vu de la précision recherchée

On peut proposer des **intervalles de confiance via une estimation empirique de la variance**



4.6 Stratification directionnelle L-adaptative et ∞ -adaptative (1/5)

- Apprentissage "continu" :



On fixe le nombre d'étapes d'adaptation et on effectue une étude asymptotique en n (nombre total de simulations)

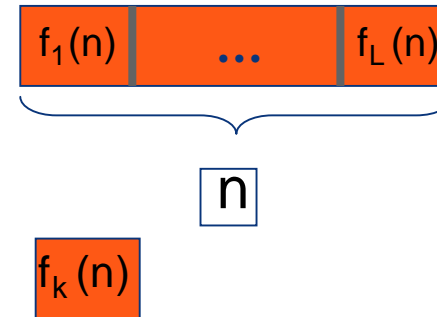


On effectue une étude asymptotique en n et en nombre d'étapes d'adaptation



4.6 Stratification directionnelle L-adaptative et ∞ -adaptative (2/5)

- (1) On commence par choisir $f_k(n)$ (et le pourcentage de tirages par quadrant $\tilde{W}_i^1 = w_i$ a priori)
- (2) On réalise un jeu de simulations dans chaque quadrant avec les $\lfloor f_k(n)\tilde{W}_i^k \rfloor$ tirages par quadrant
- (3) On estime la proportion de tirages optimum par strate \tilde{W}_i^{k+1} avec les $\lfloor f_k(n)\tilde{W}_i^k \rfloor$ tirages (recyclage possible) et on réitère



$$w_i^{k+1} = \frac{\sqrt{\tilde{V}_i^k}}{\sum_{j=1}^m \sqrt{\tilde{V}_j^k}} \leftarrow w_i^{\text{opt}} = \frac{\sqrt{v_i}}{\sum_{j=1}^m \sqrt{v_j}}$$

$$\tilde{V}_i^k = I_q^2(k) - \tilde{I}_q(k)$$

$$\tilde{I}_{q_i}^2(k) = \frac{1}{N_i^k} \sum_{j=1}^{N_i^k} P_{i,j}^2$$

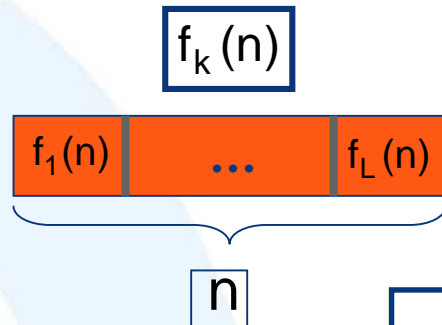
$$\tilde{I}_{q_i}(k) = \frac{1}{N_i^k} \sum_{j=1}^{N_i^k} P_{i,j}$$

- (4) On estime la probabilité de défaillance par stratification directionnelle classique avec les \tilde{W}_i^L estimés



4.6 Stratification directionnelle L-adaptative et ∞ -adaptative (3/5)

Nombre de tirages réalisés à l'étape k :



Nombre de tirages dans la strate i jusqu'à l'étape k :

$$N_i^k = N_i^{k-1} + f_k(n) \tilde{W}_i^{(k)}$$

$$\frac{f_k(n)}{f_{k+1}(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Estimateur :

$$\hat{I}^{\text{LSDA}} = \sum_{i=1}^m \frac{p_i}{N_i^L} \sum_{j=1}^{N_i^L} \xi(A_j^i)$$

Résultat asymptotique :

$$\sqrt{n}(\hat{I}^{\text{LSDA}} - I) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} N(0, \sigma_{\text{opt}}^2)$$



4.6 Stratification directionnelle L-adaptative et ∞ -adaptative (4/5)



Nombre de tirages jusqu'à l'étape k :

$$N^k$$

Nombre de tirages dans la strate i jusqu'à l'étape k :

$$N_i^k = N_i^{k-1} + 1 + m_i^k$$

$$\frac{k}{N^k} \rightarrow 0$$

Estimateur :

$$\hat{I}^{\infty\text{SDA}} = \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i}{N_i^L} \sum_{j=1}^{N_i^L} \xi(A_j^i)$$

Résultat asymptotique :

$$\sqrt{n} \left(\hat{I}_f^{\infty\text{SDA}} - I \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} N(0, \sigma_{\text{opt}}^2)$$



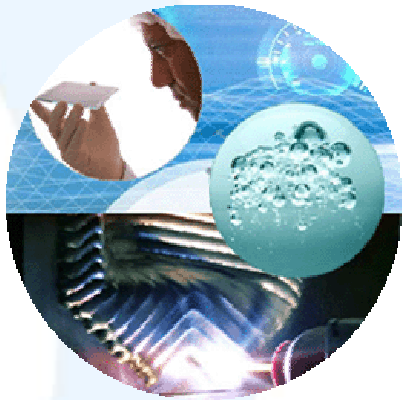
4.6 Stratification directionnelle L-adaptative et ∞ -adaptative (5/5)

Conclusion :

Le cadre **L-adaptatif** pour $L > 2$ est **trop coûteux en appels** à la fonction de défaillance

De plus, le fait que les **strates** soient **fixes** ne permet pas de tirer totalement profit d'une multi-adaptation

Avec notre choix de strates fixes, nous constatons que L-SDA pour $L > 2$ n'apporte pas de nette amélioration sur l'estimation

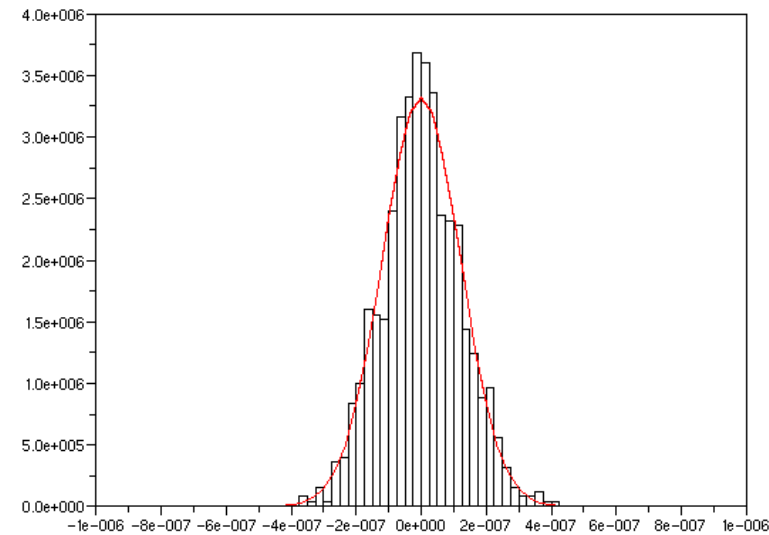
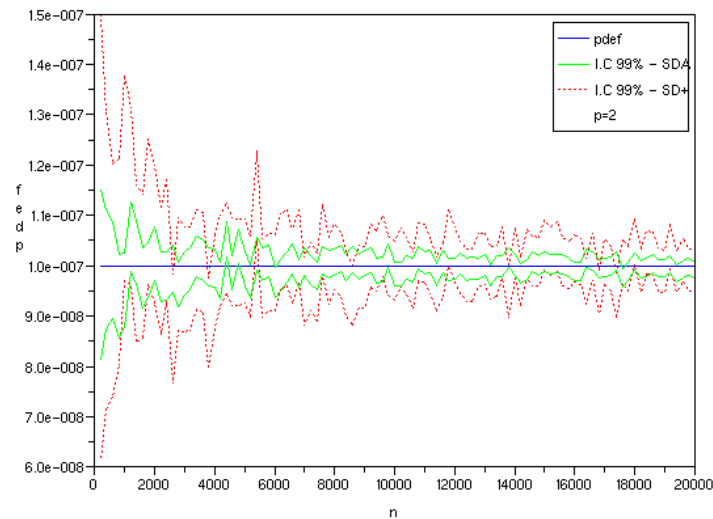
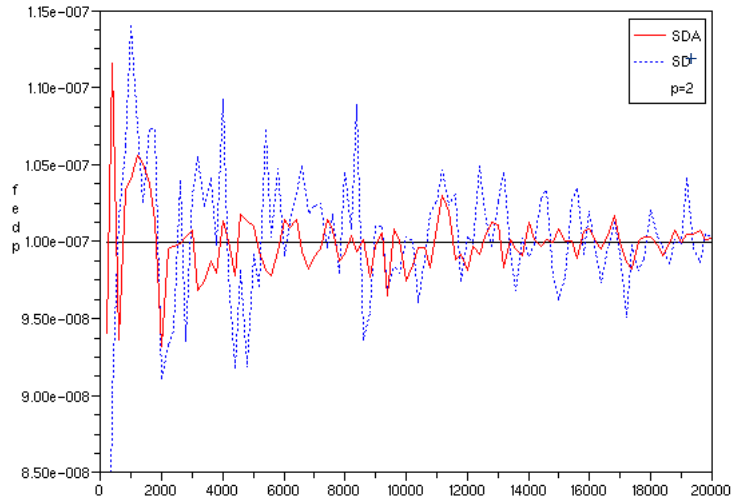
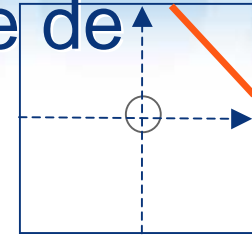


2-SDA : applications

- 1) Exemple académique
- 2) Application au modèle "Cruel"
- 3) Application au modèle "Cuve3D"



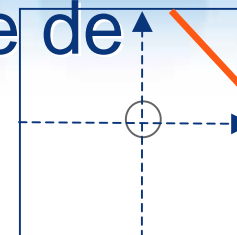
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



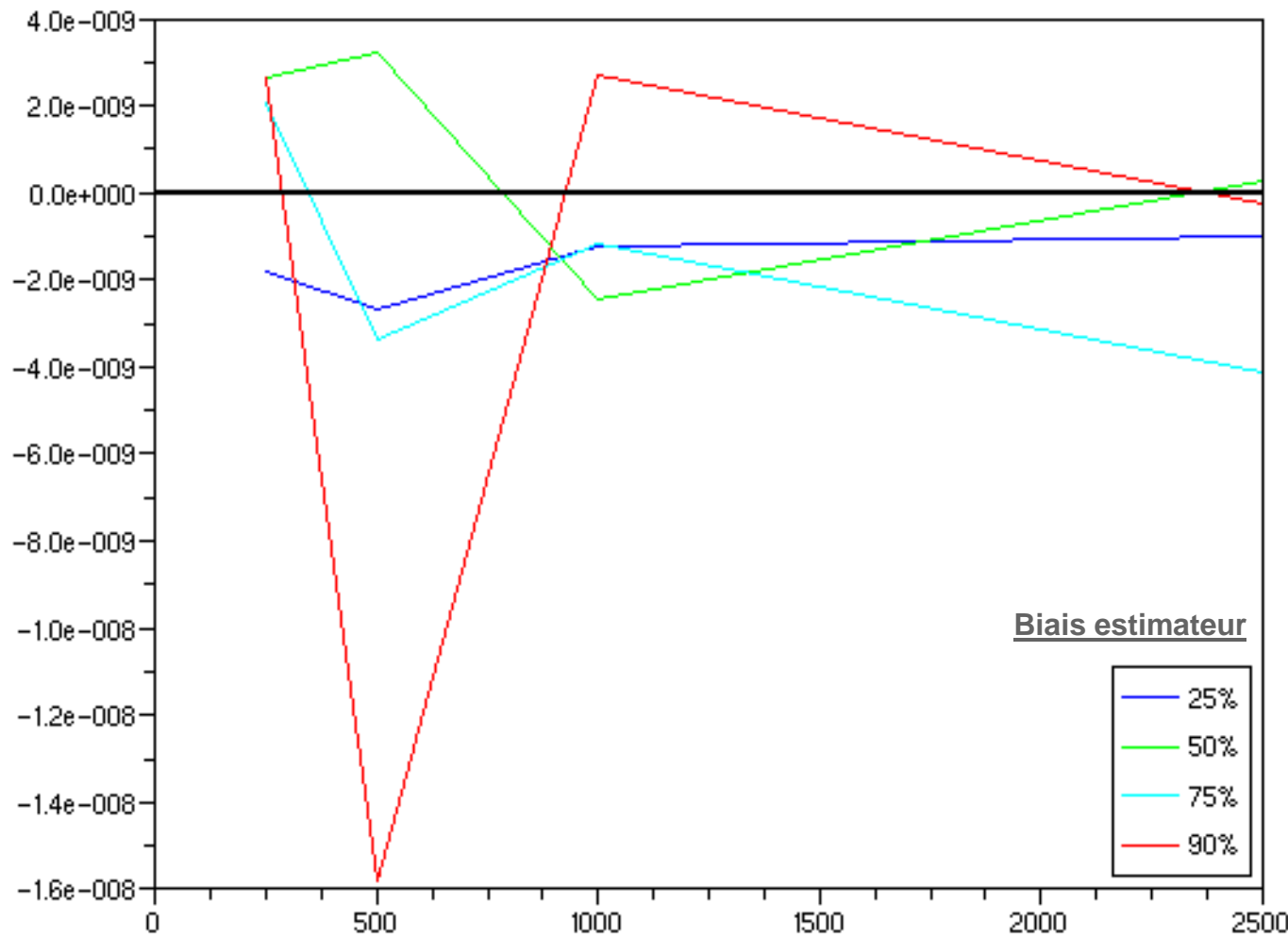
$p = 2$
 $p_f = 10^{-7}$
 $n = 1000$
nombre de simulations = 1000



5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane

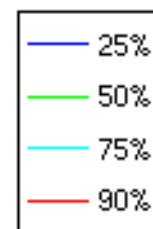


Estimateur sans recyclage



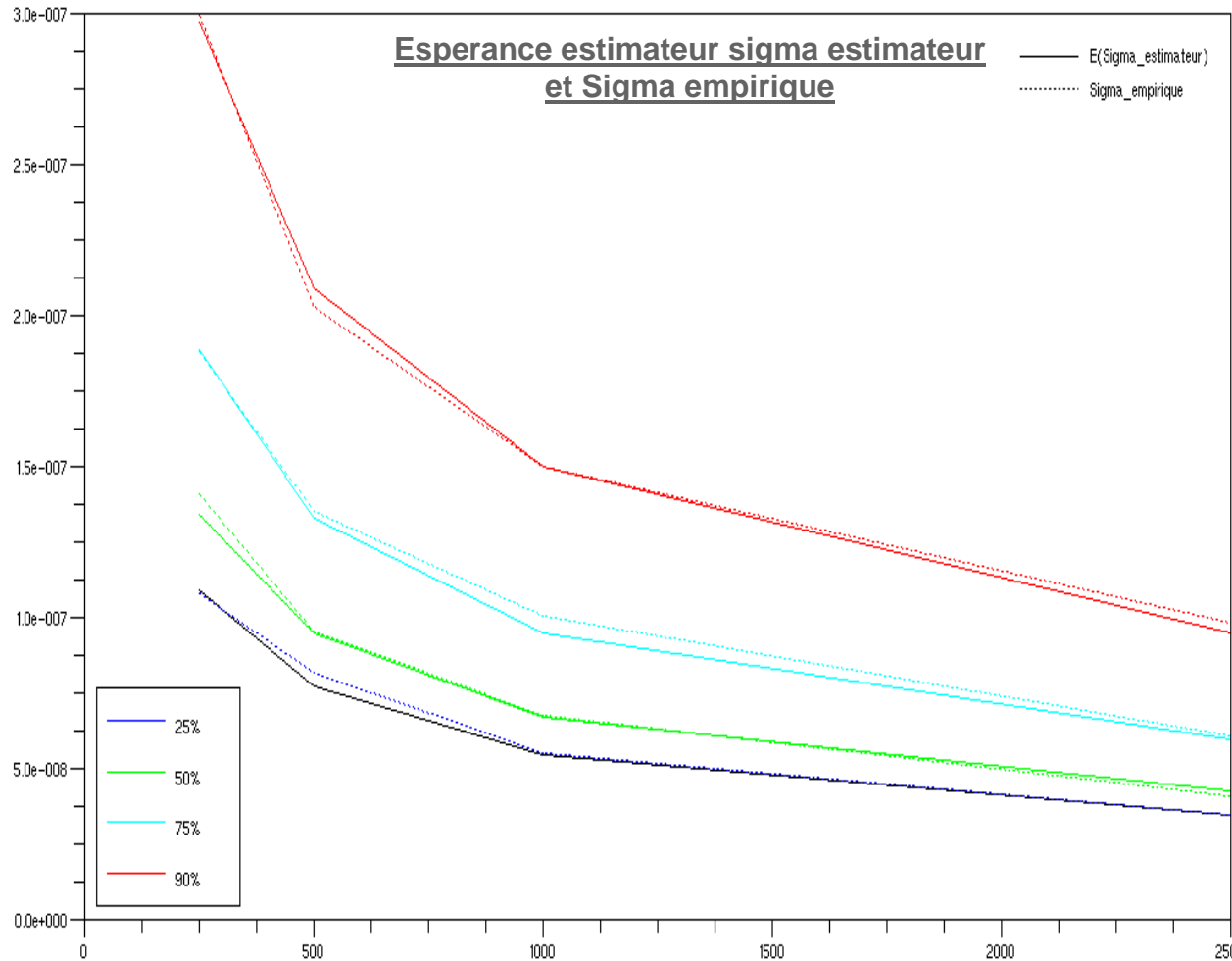
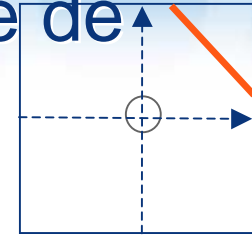
L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt

Biais estimateur





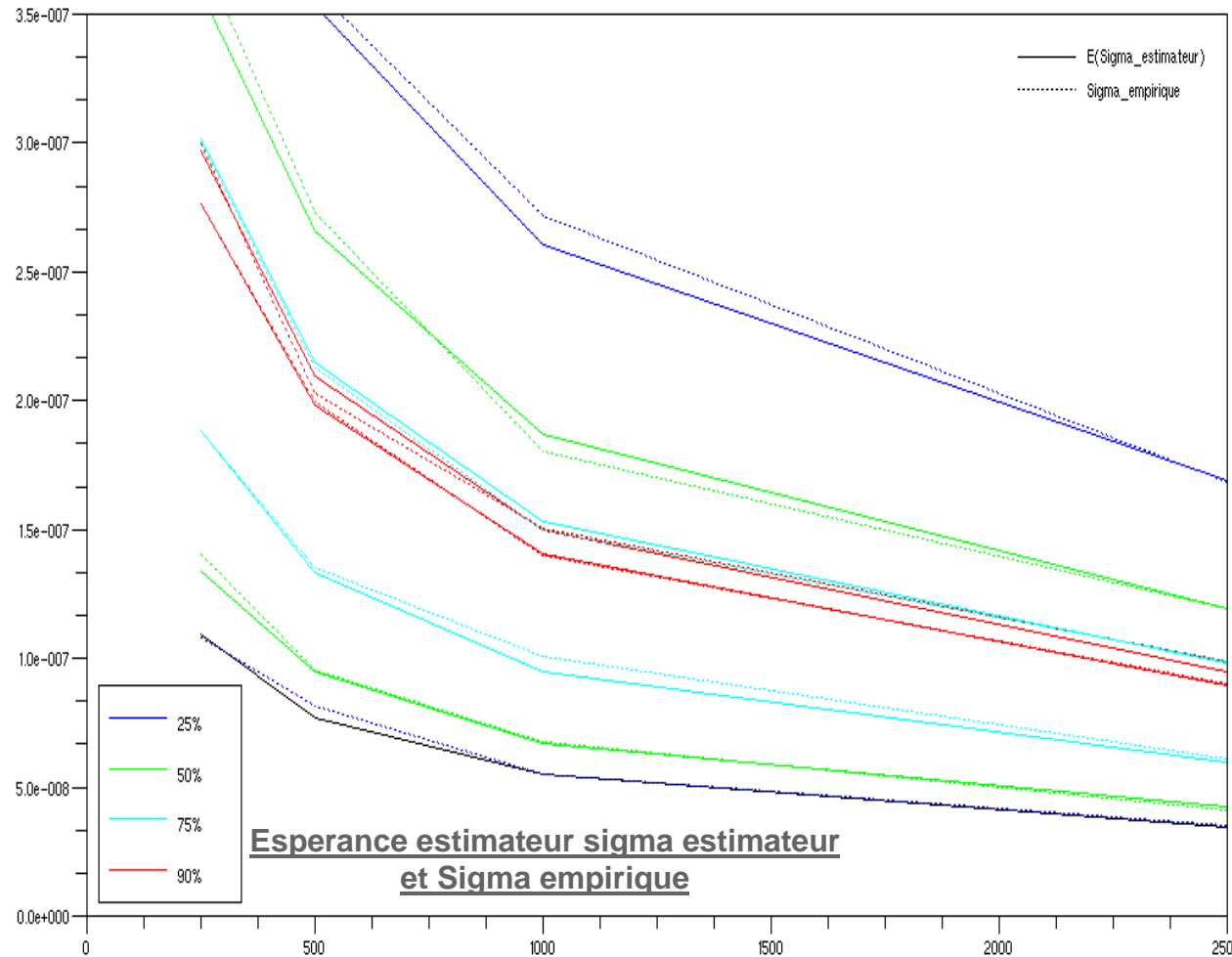
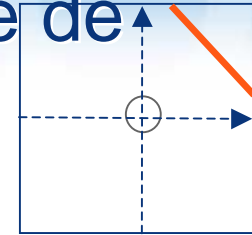
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt



5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane

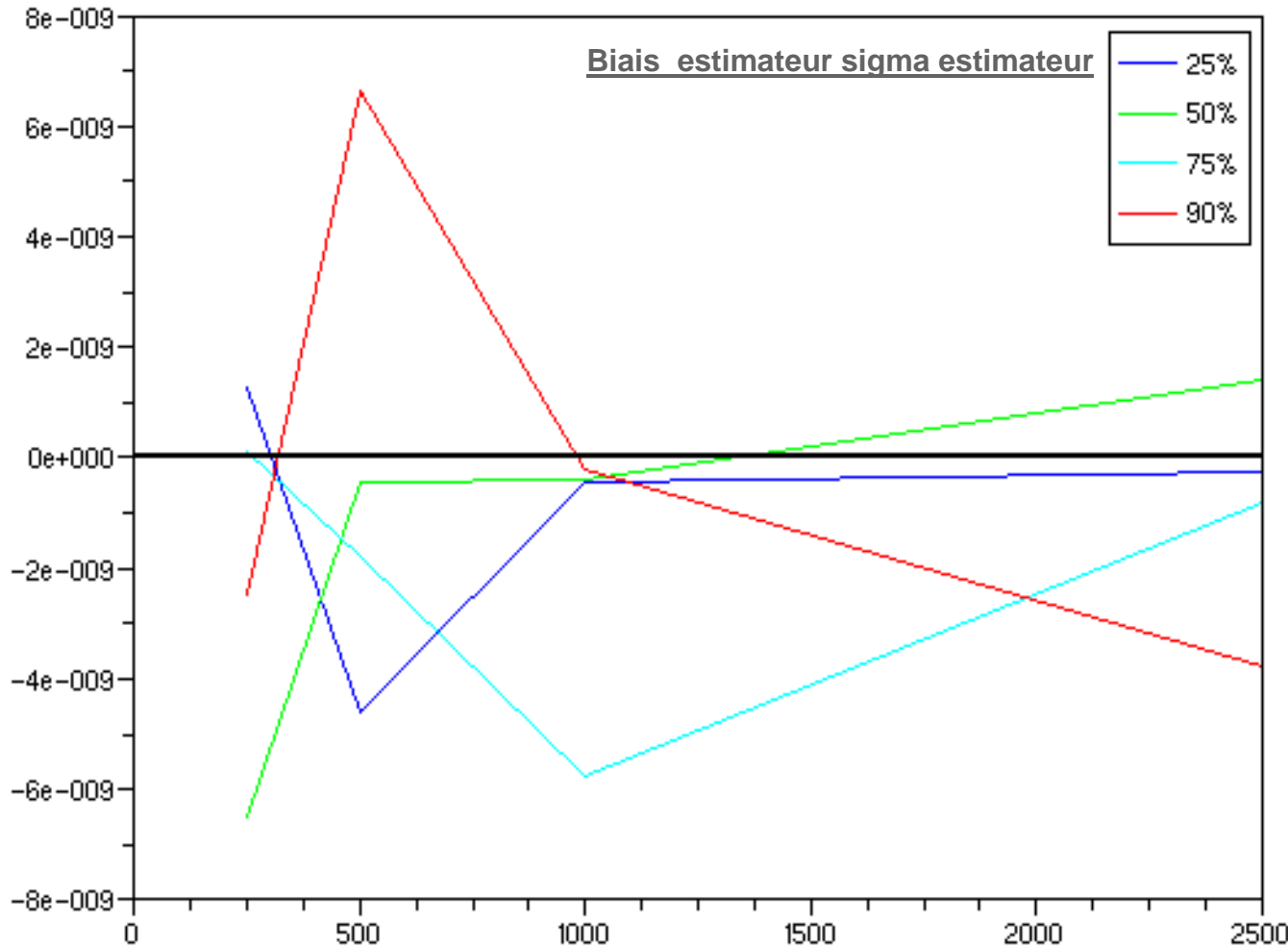
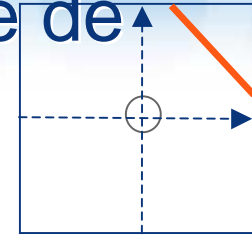


L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt

Esperance estimateur sigma estimateur
et Sigma empirique



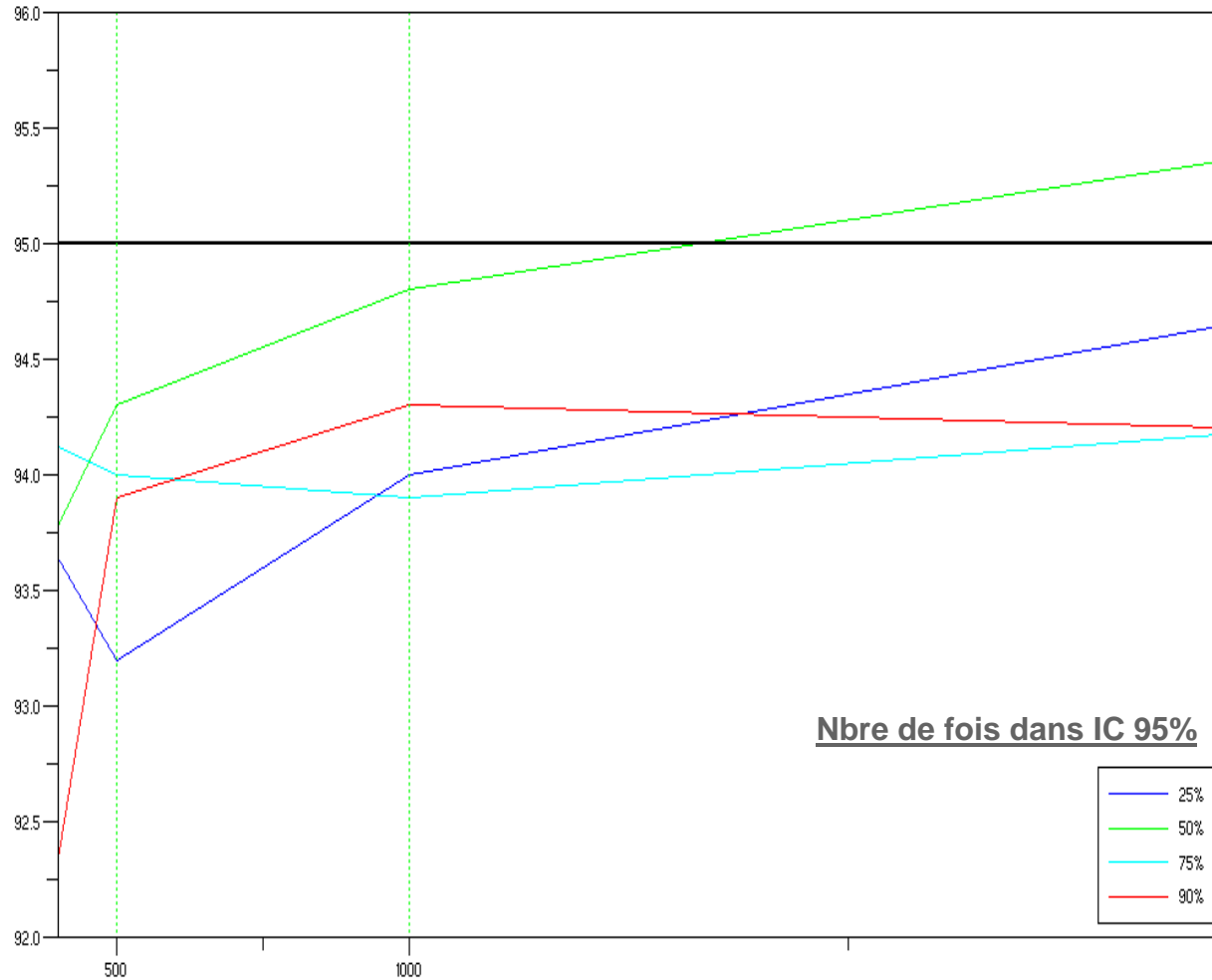
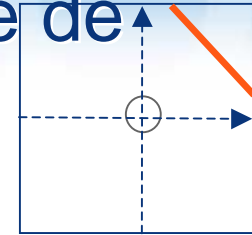
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt



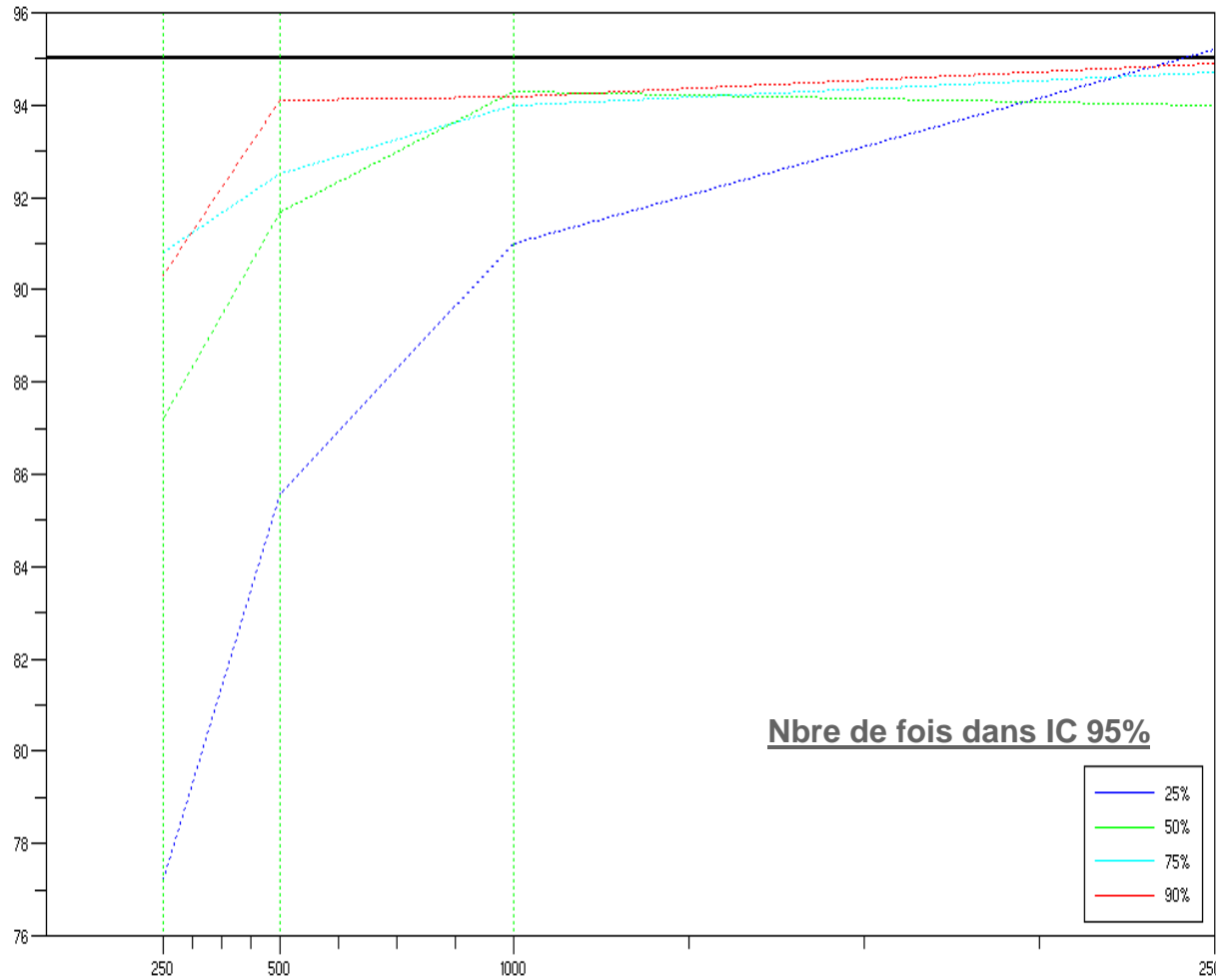
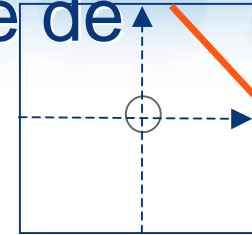
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt



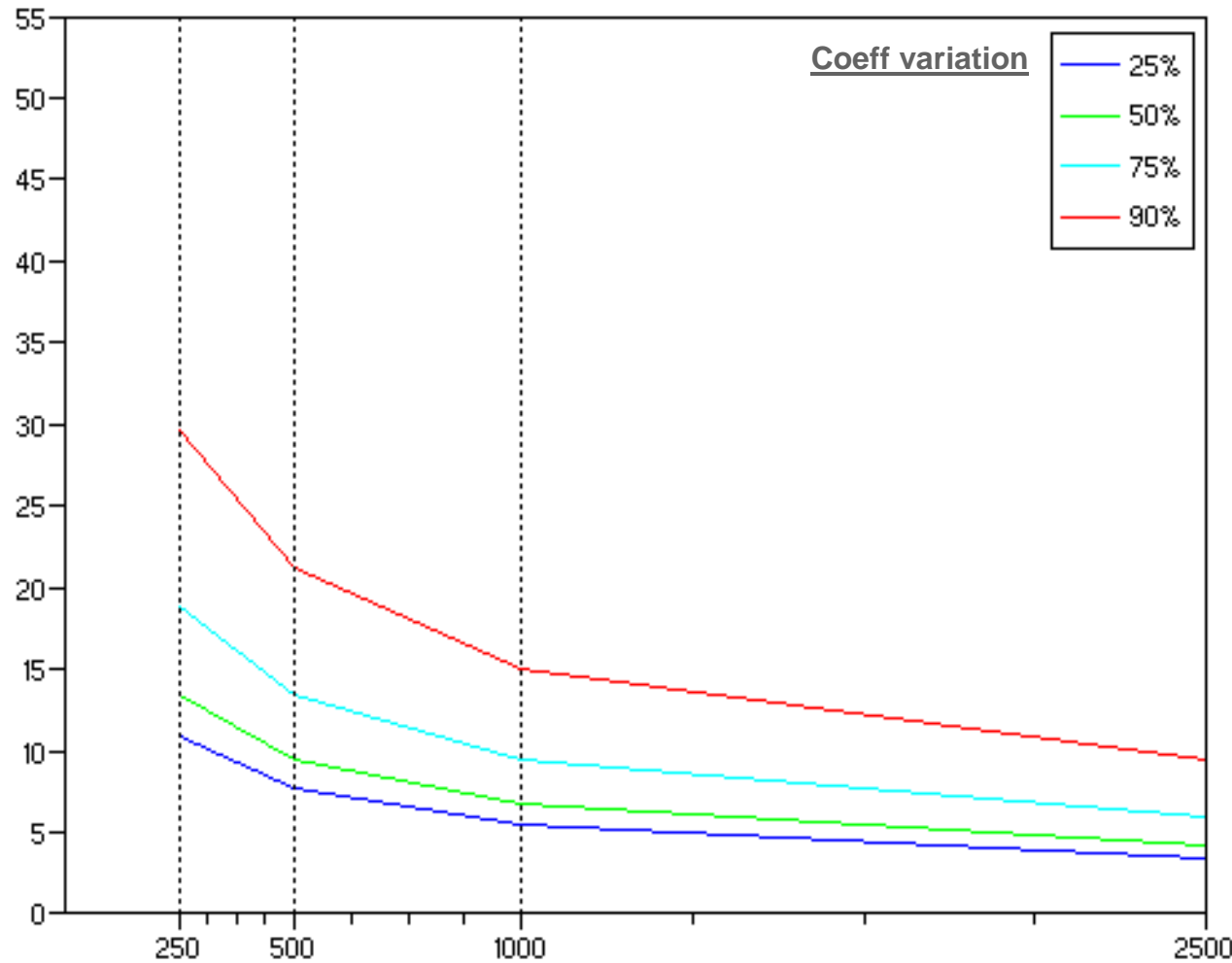
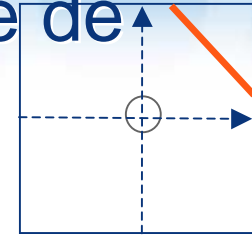
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt



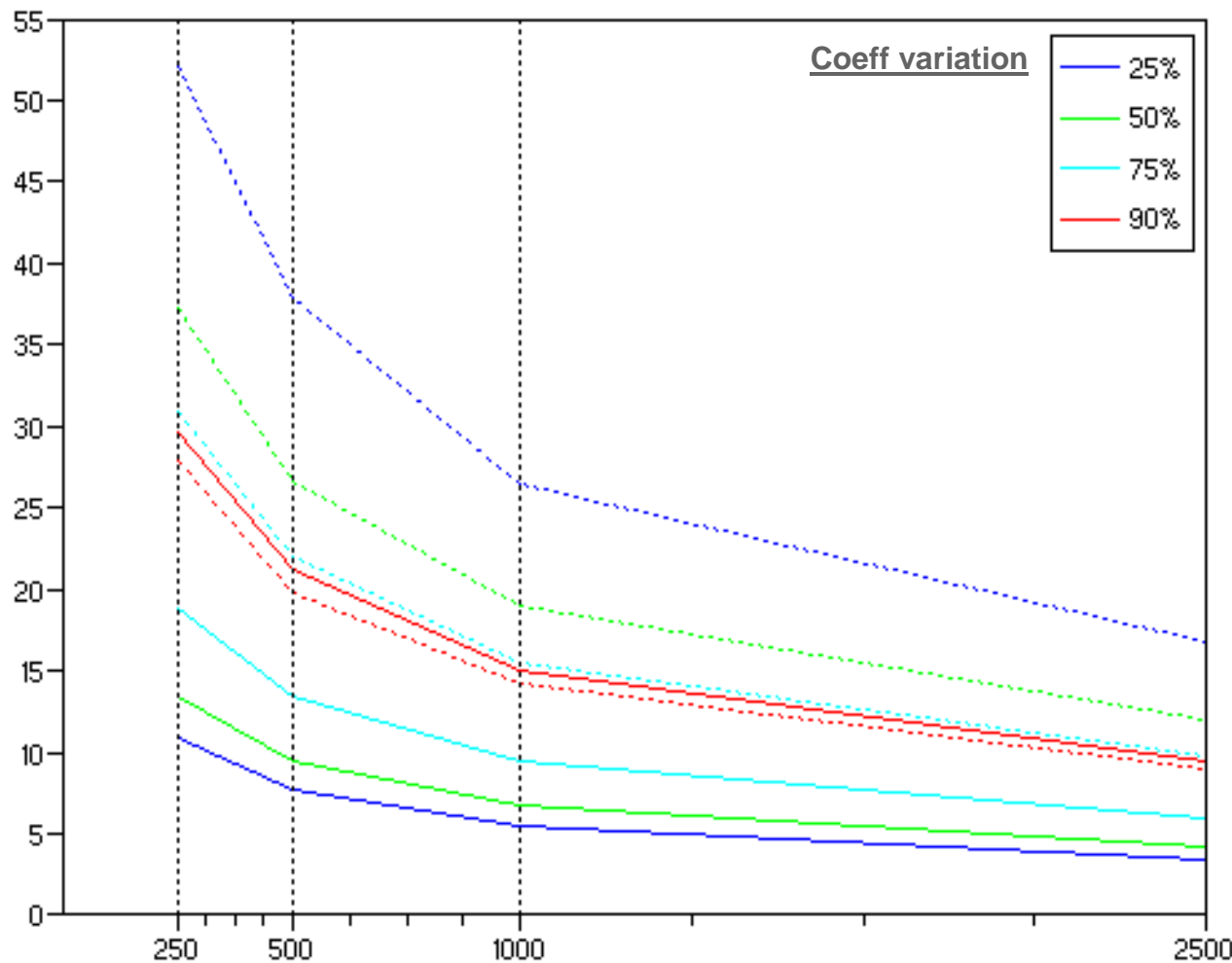
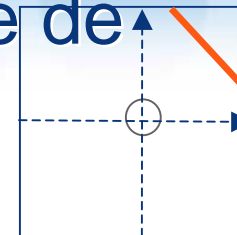
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt



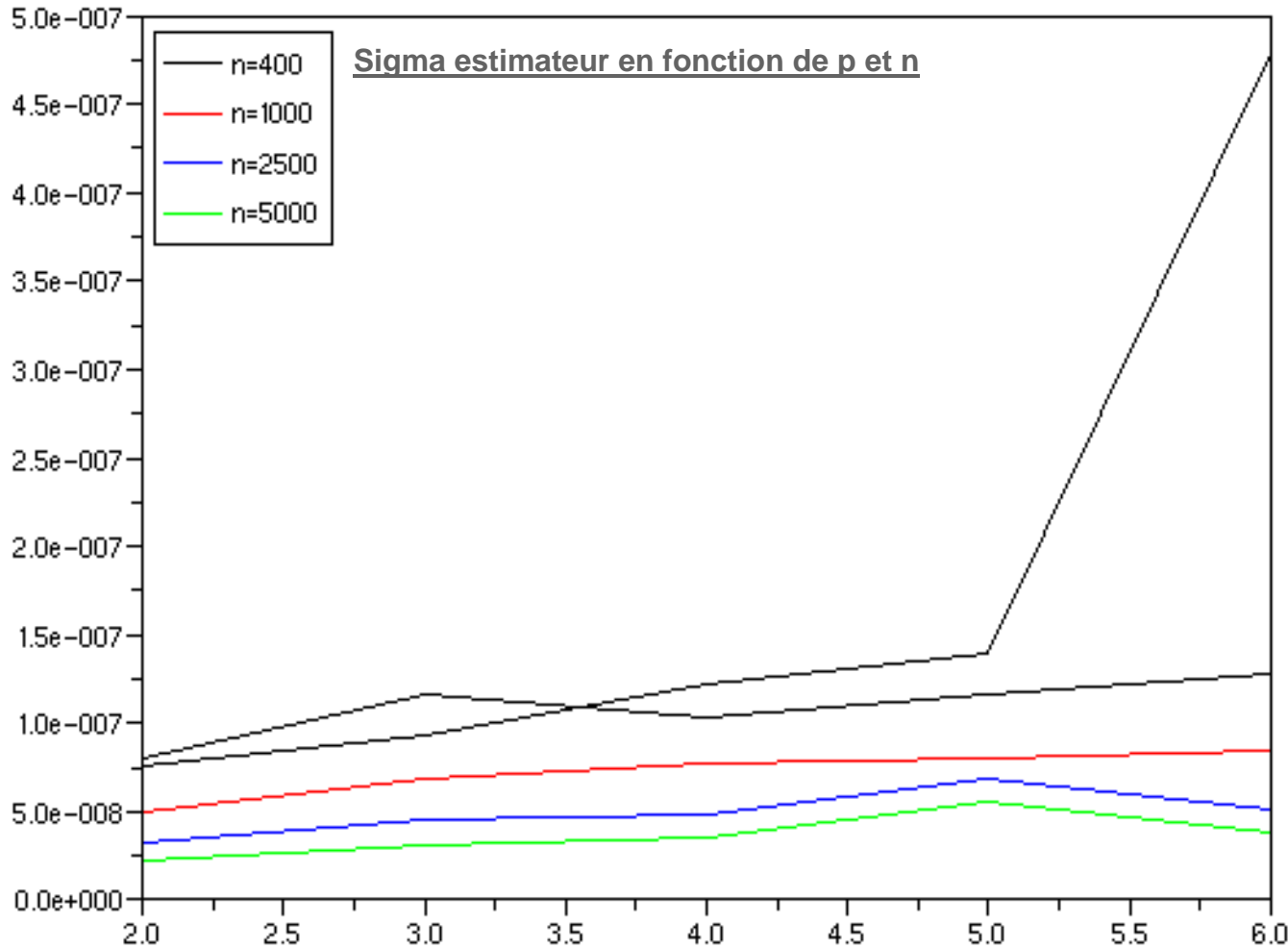
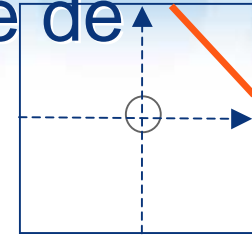
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt



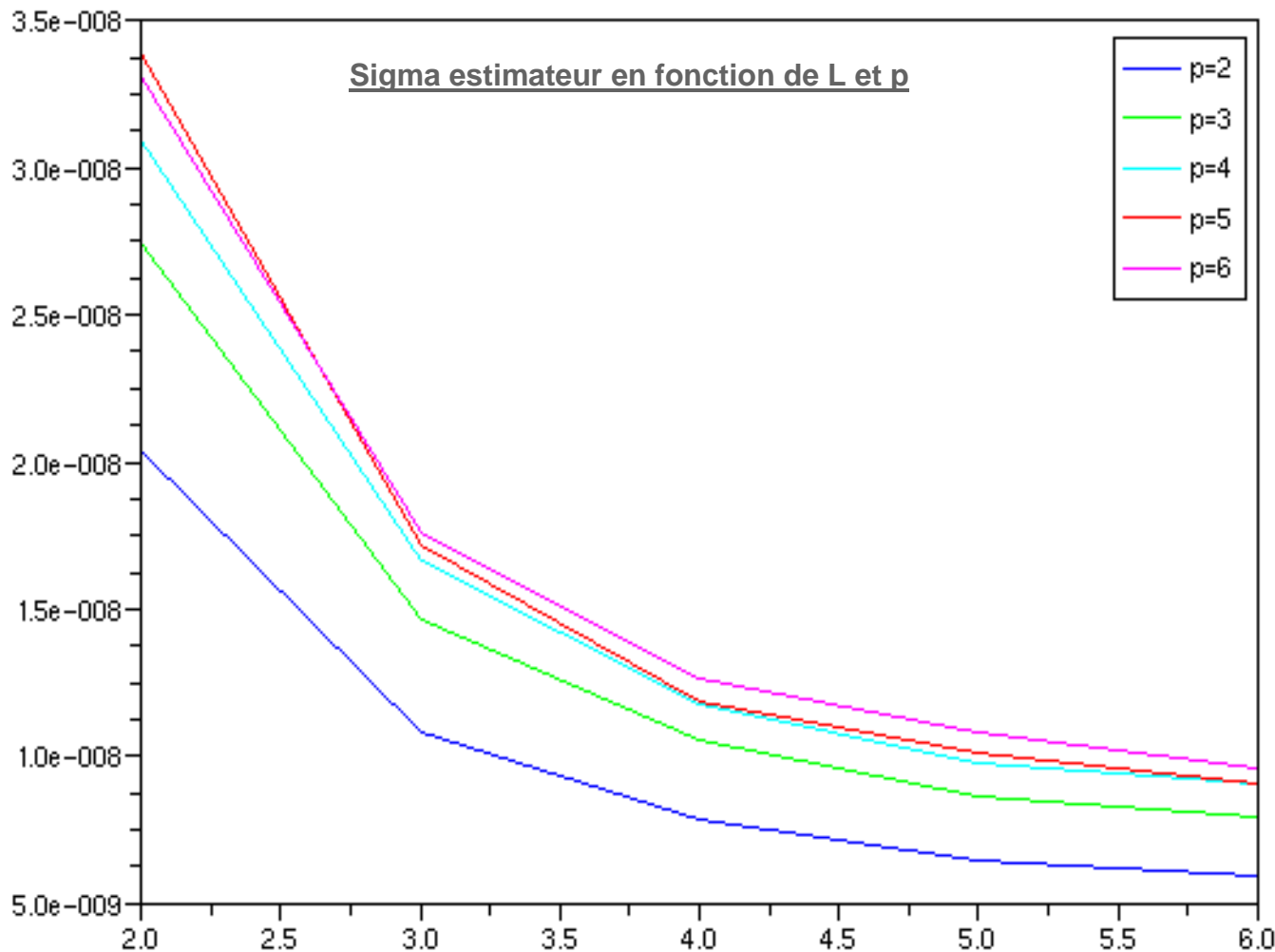
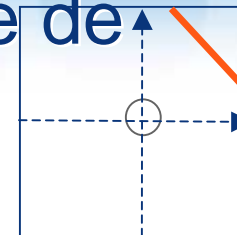
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



L=2
Pdef=10⁻⁶
Nombre itération = 1
Kopt
Nombre AG = 2000 à 20000
En moyenne ? AG par direction



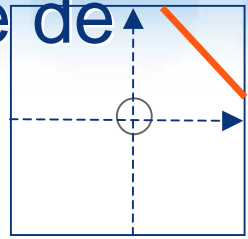
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



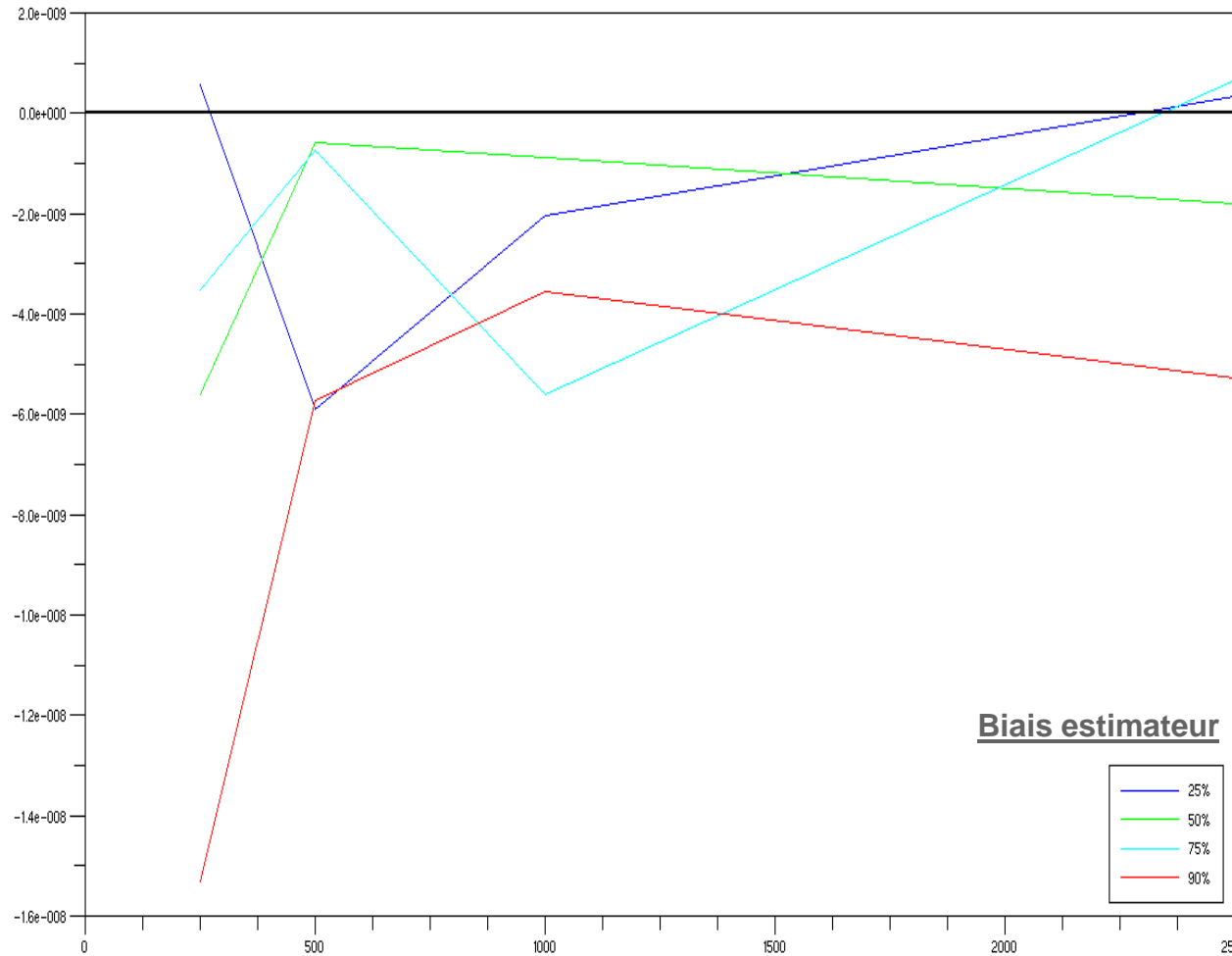
L=2
Pdef=10⁻⁶
Nombre itération = 1
Kopt
Nombre AG = 2000 à 20000
En moyenne ? AG par direction



5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



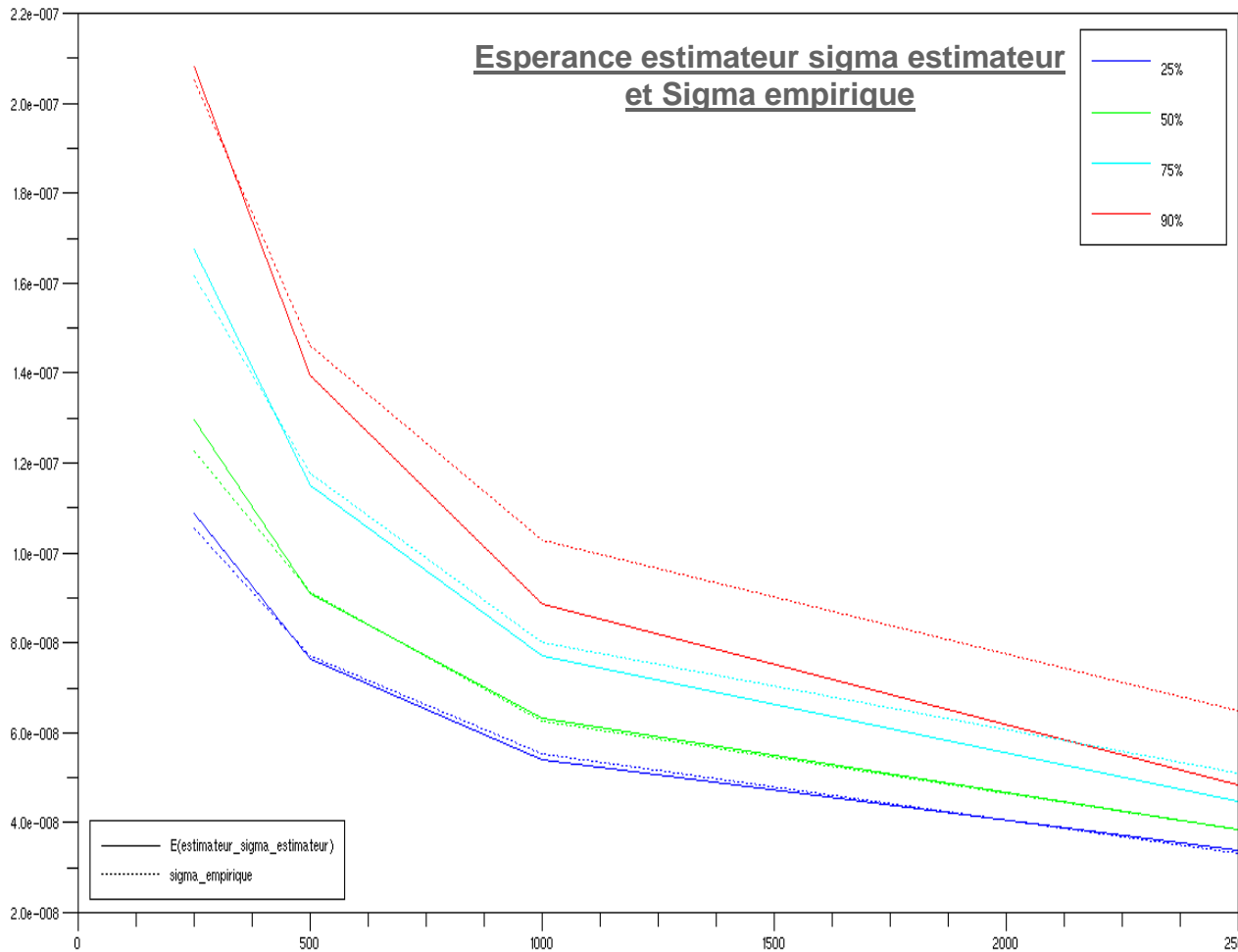
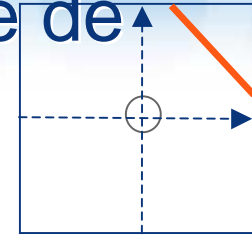
Estimateur avec recyclage



L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt



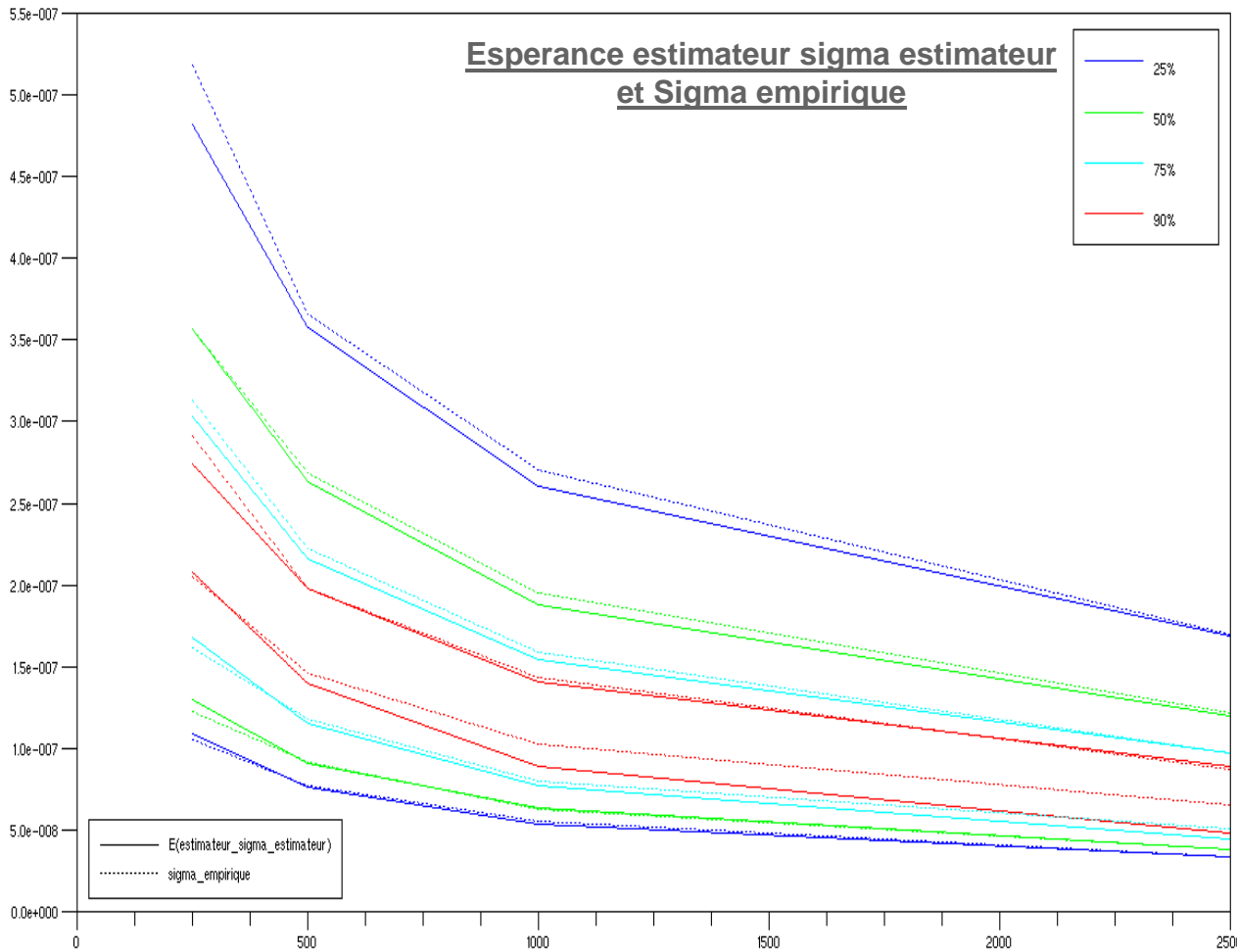
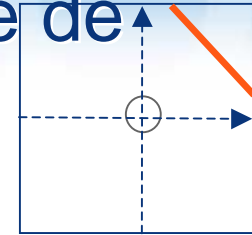
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt



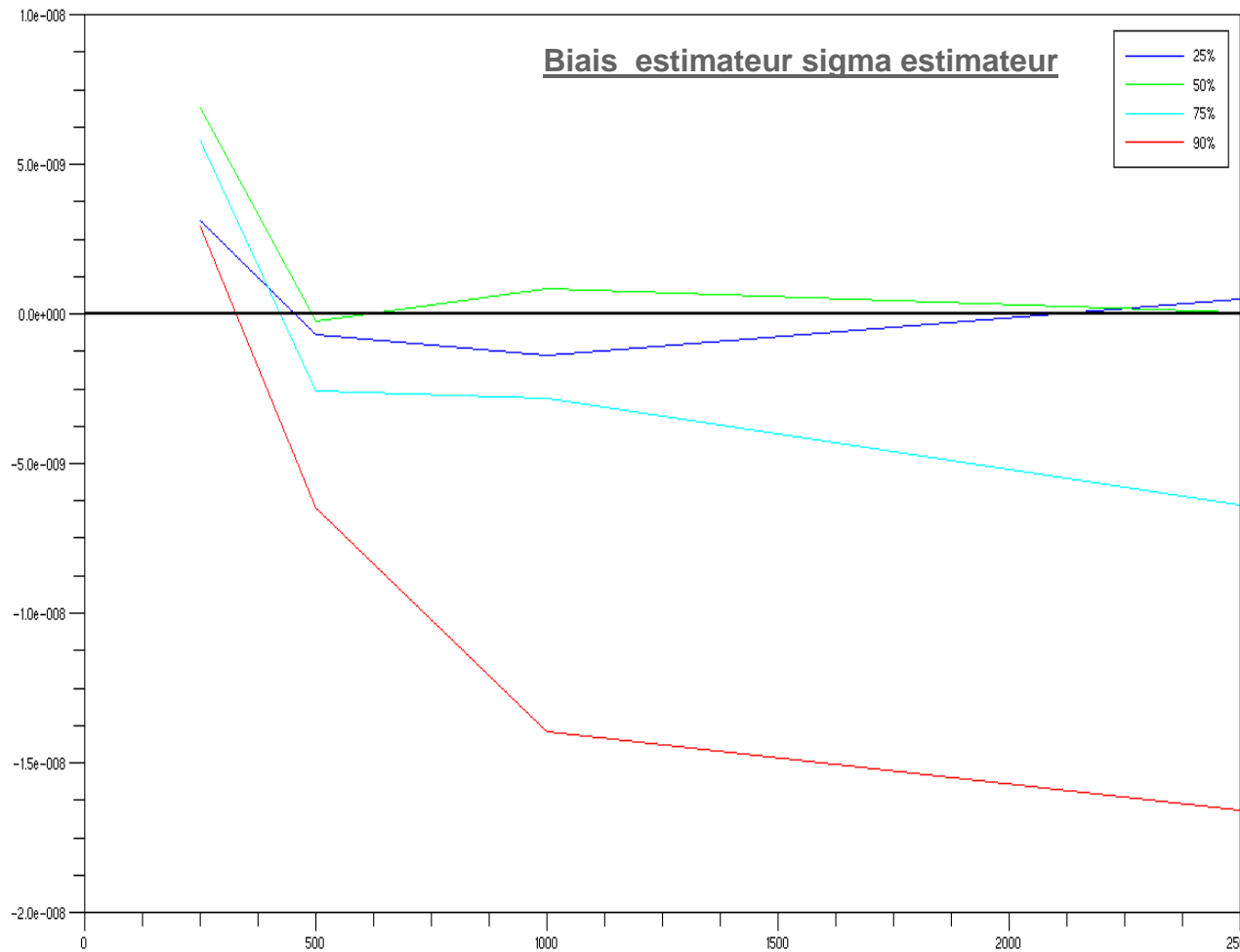
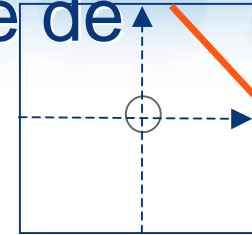
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt



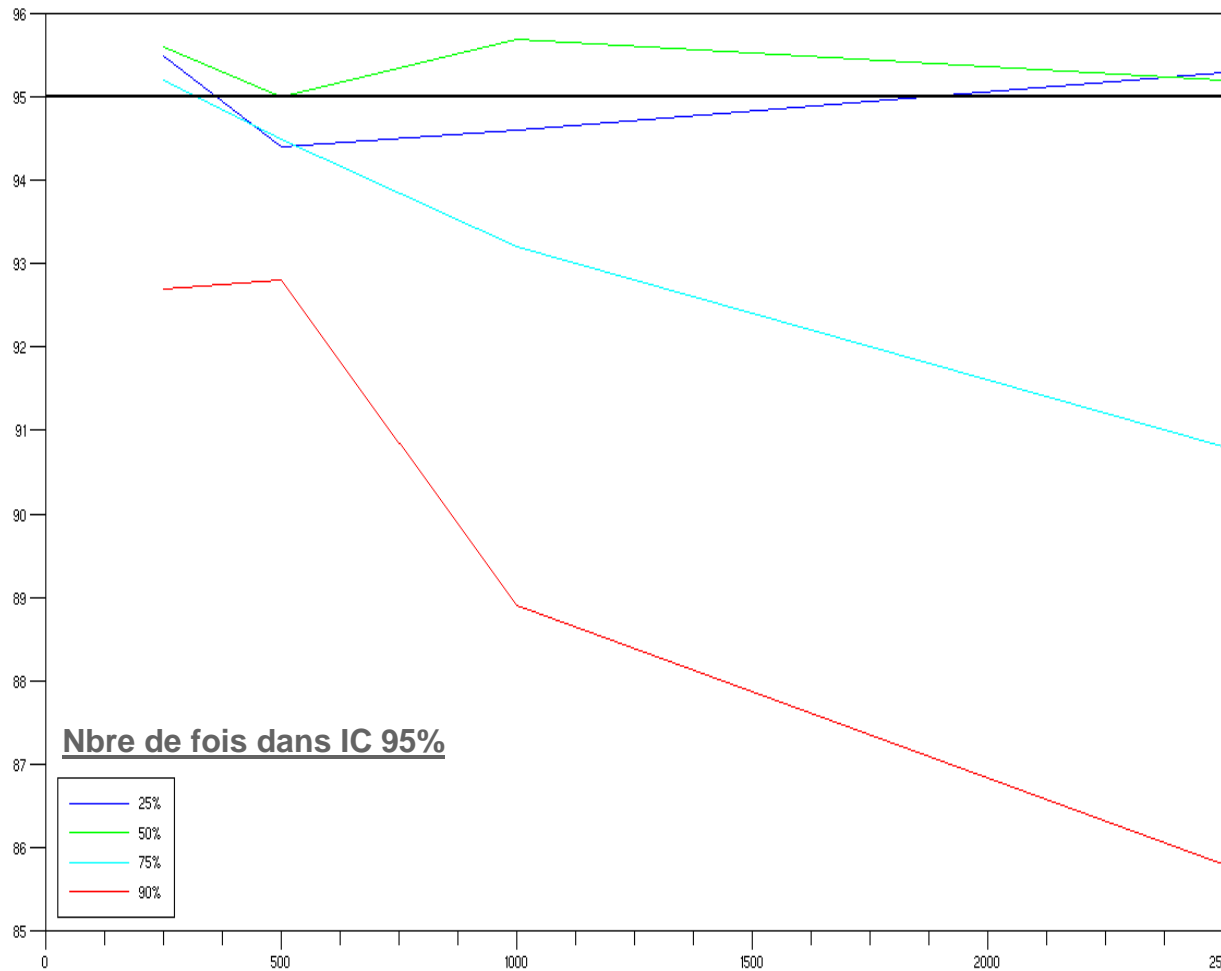
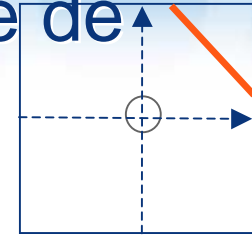
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt

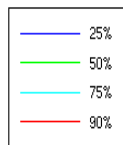


5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



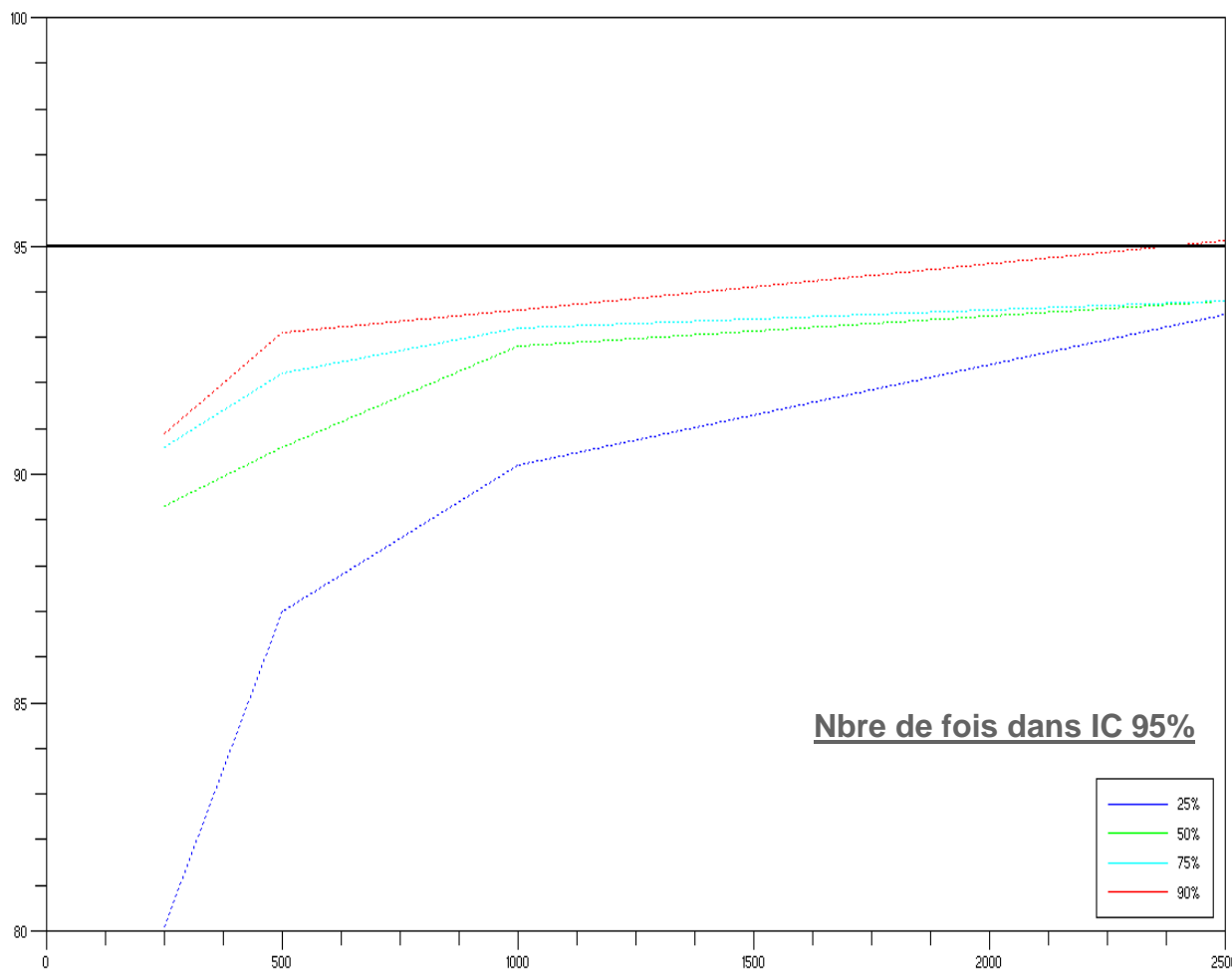
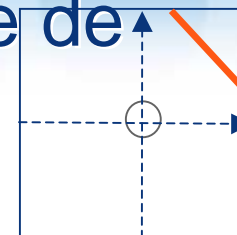
L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt

Nbre de fois dans IC 95%





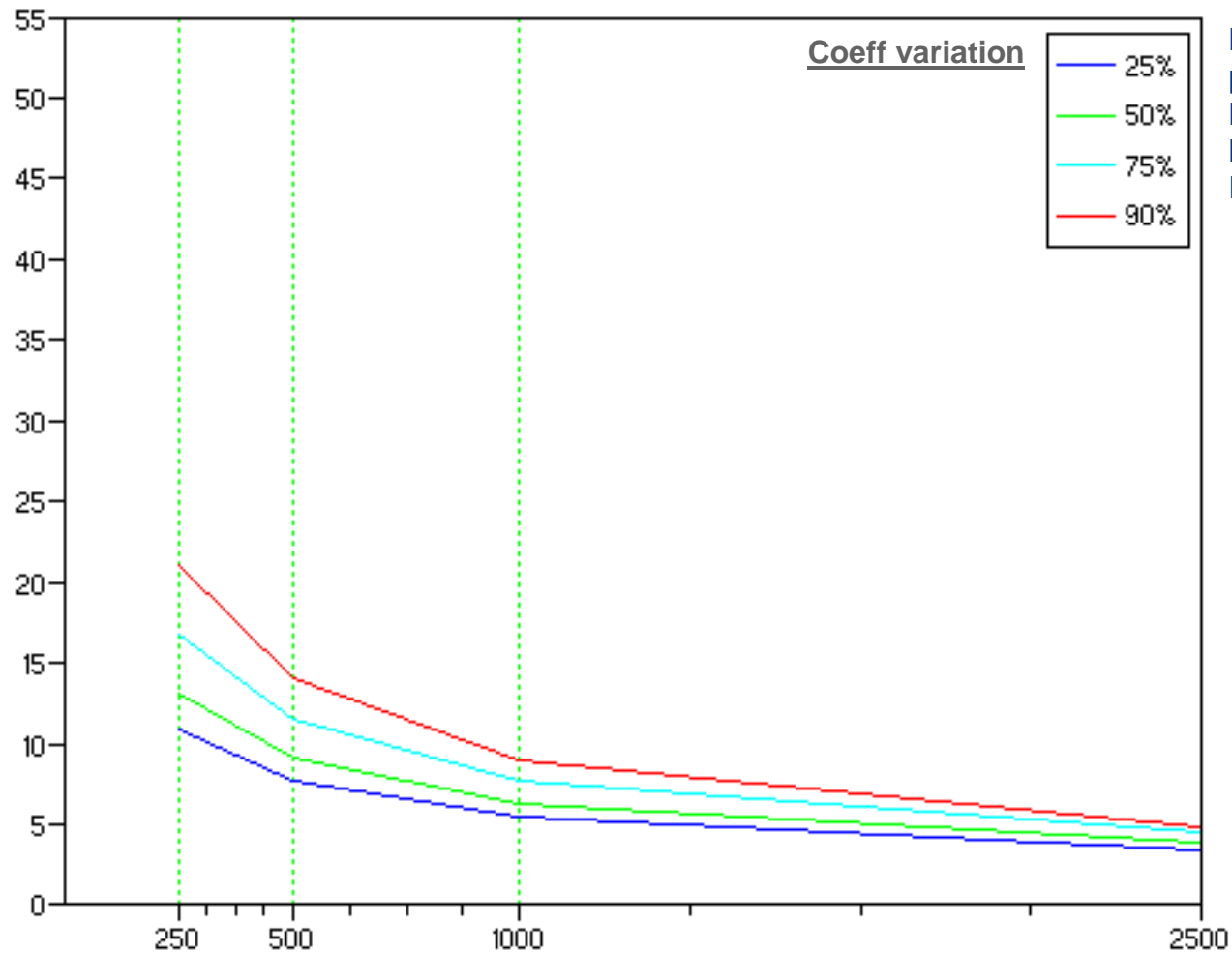
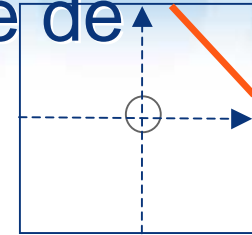
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt



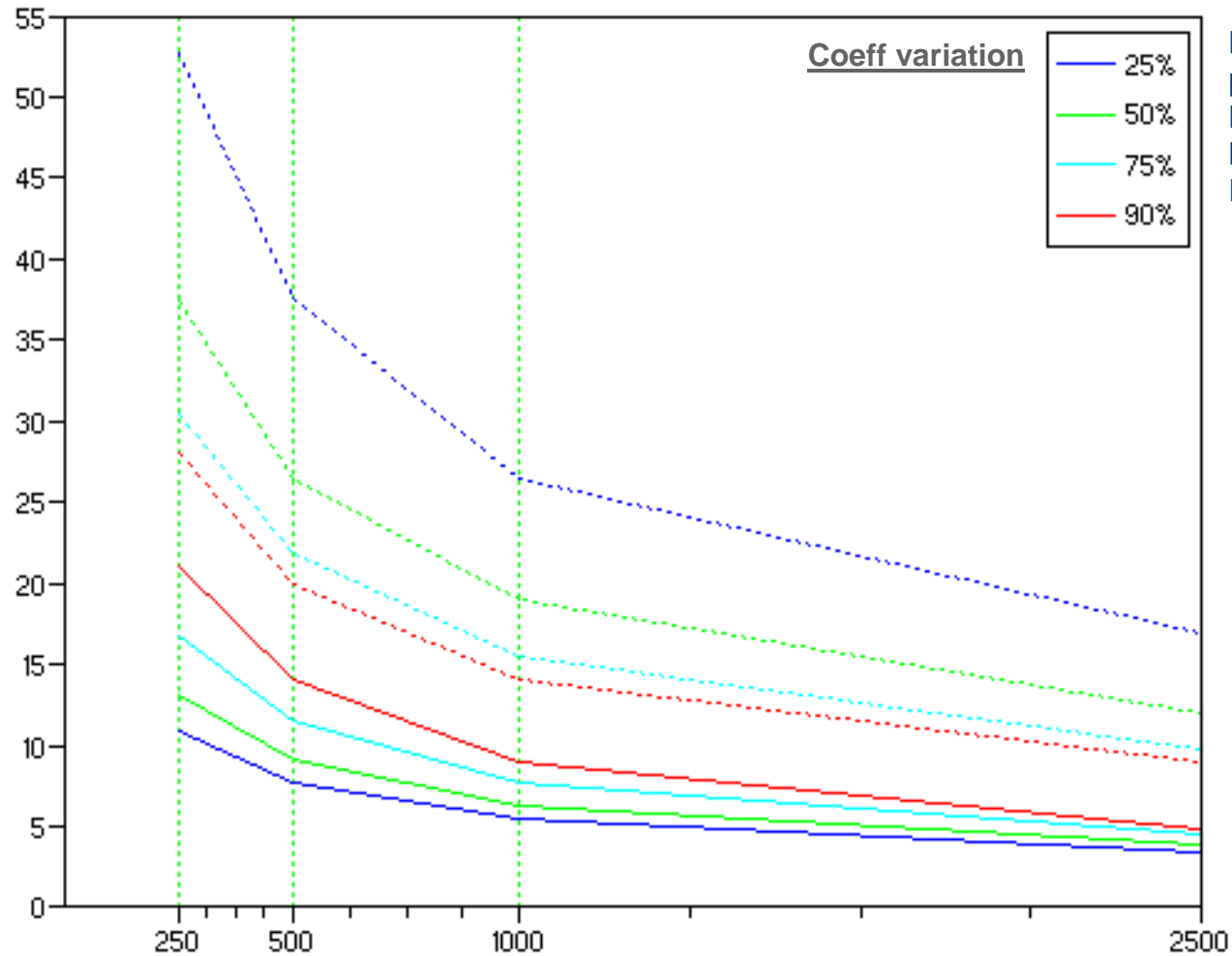
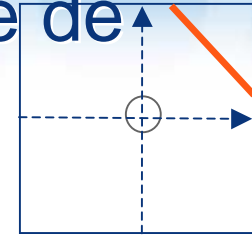
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt



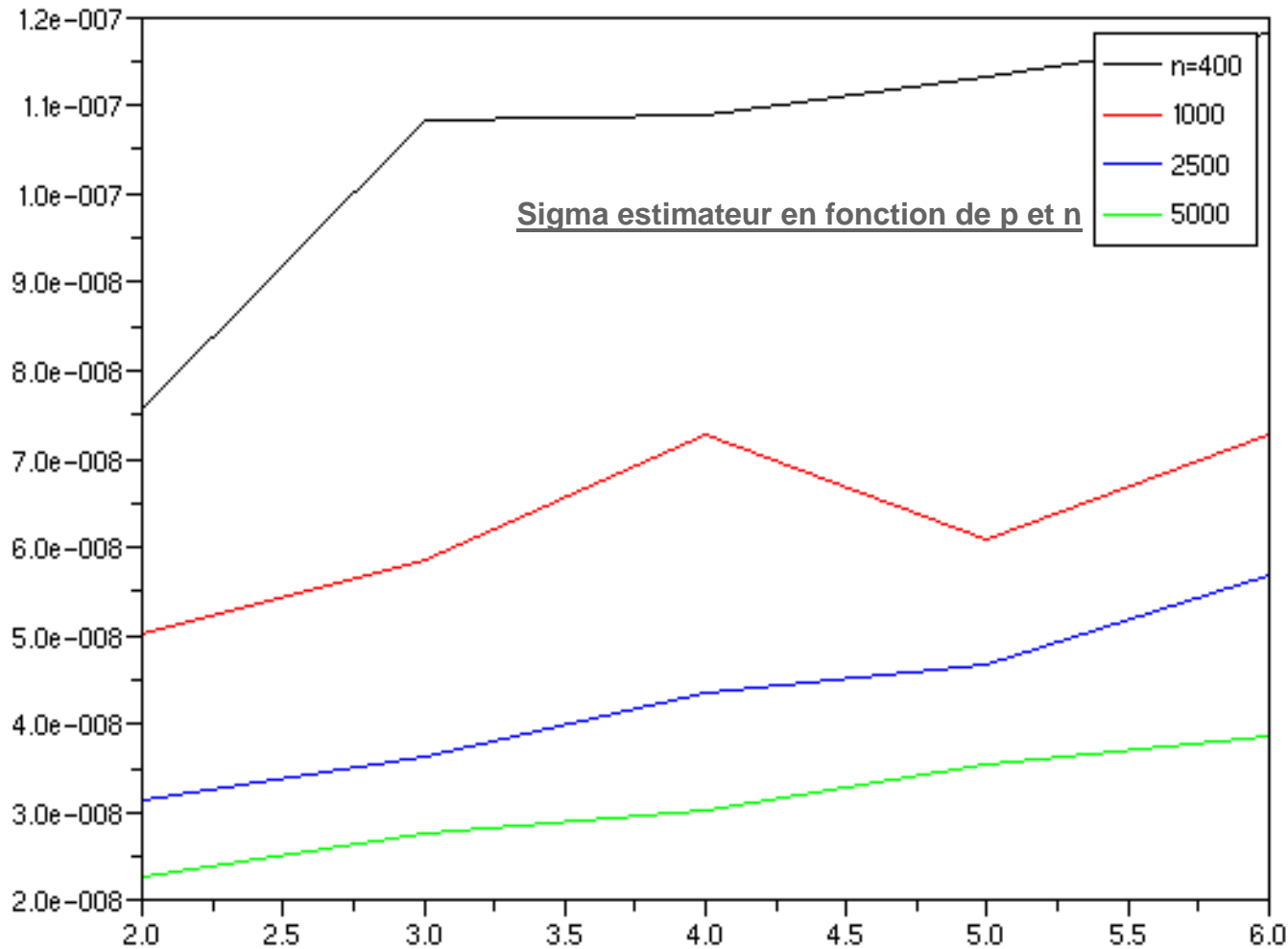
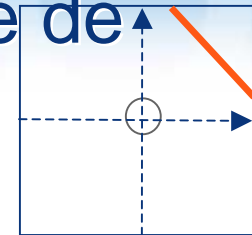
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



L=2
p=3
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1000
Kopt



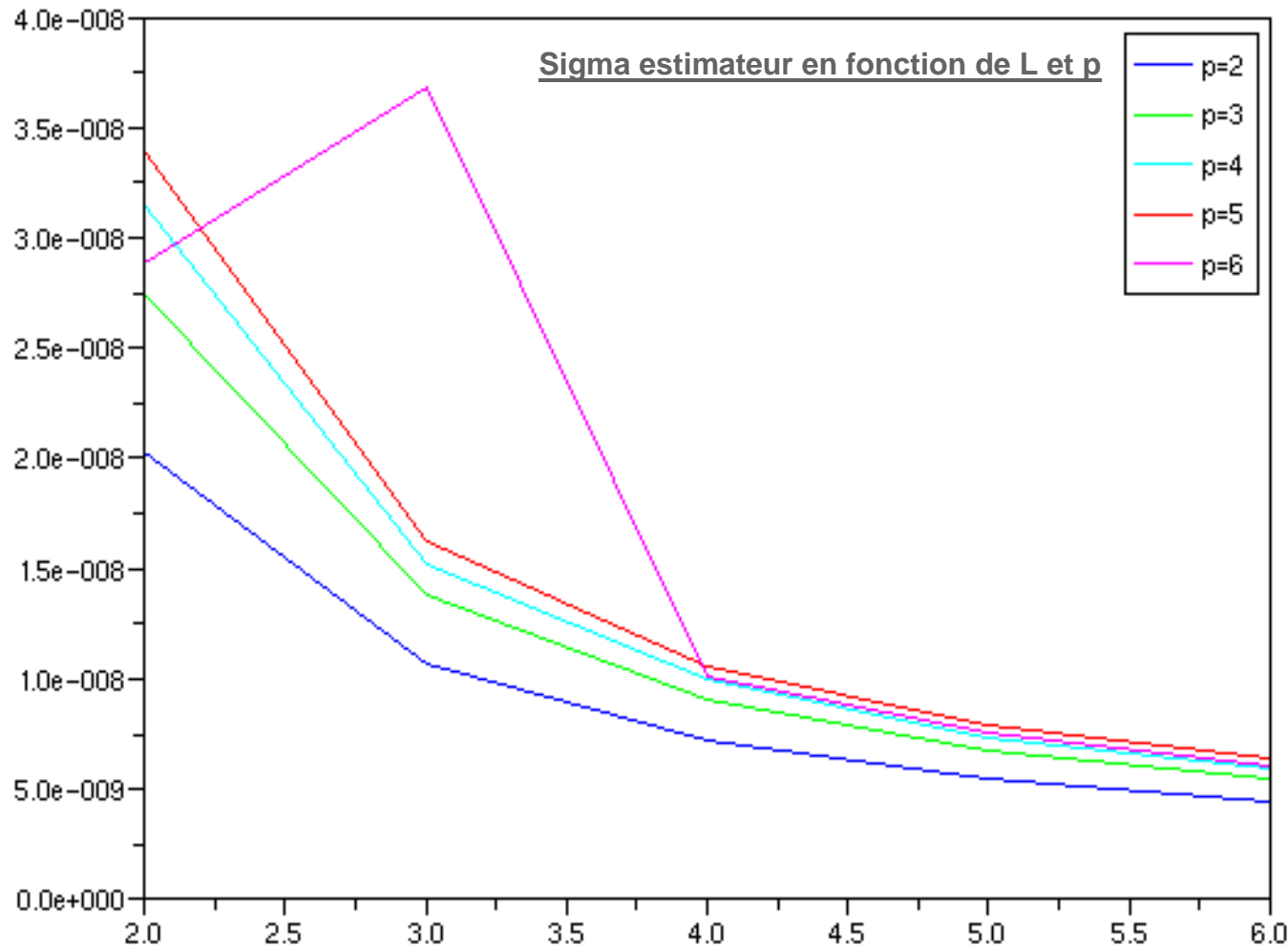
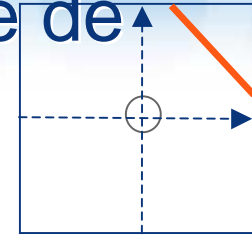
5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



L=2
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1
Kopt
Nbre AG = 2000 à 20000
En moyenne ? AG par direction



5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane



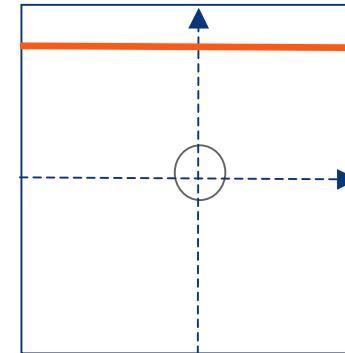
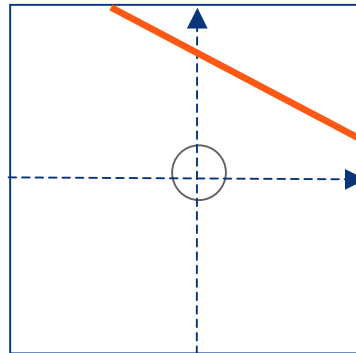
L=2
Pdef=10⁻⁶
Nbre itération = 1
Kopt
Nbre AG = 2000 à 20000
En moyenne ? AG par direction



5.1 Résultats numériques sur une surface de défaillance hyperplane

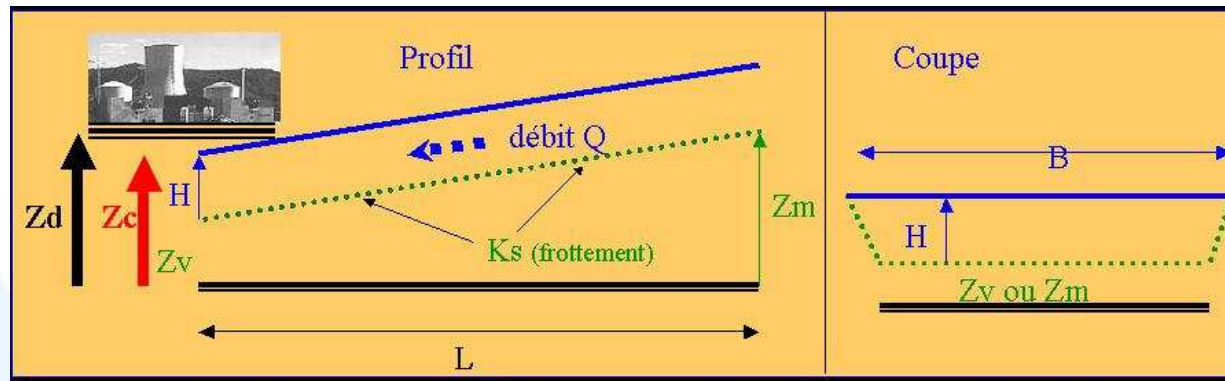
Même étude pour les hyperplans suivant :

L=2
p=3
Pdef= 10^{-6}
Nombre itération = 1000
Kopt
Nombre AG = 800 à 9000
En moyenne, 8 AG par direction





5.2 Modèle "Crue"



Modèle (analytique) :

$$G(Z_v, Q, K_s, Z_m) = H_d + Z_b - Z_v - \left(\frac{Q}{B \times K_s \times \sqrt{\frac{Z_m - Z_v}{L}}} \right)^{3/5}$$

Nous allons comparer les résultats obtenus par les méthodes suivantes :

- Monte Carlo standard
- Réduction de la dimension, par rapport soit à Q, soit à Ks
- Simulation Directionnelle
- 2-SDA
- Tirage d'importance : tirages gaussiens autour du point de conception (FORM)

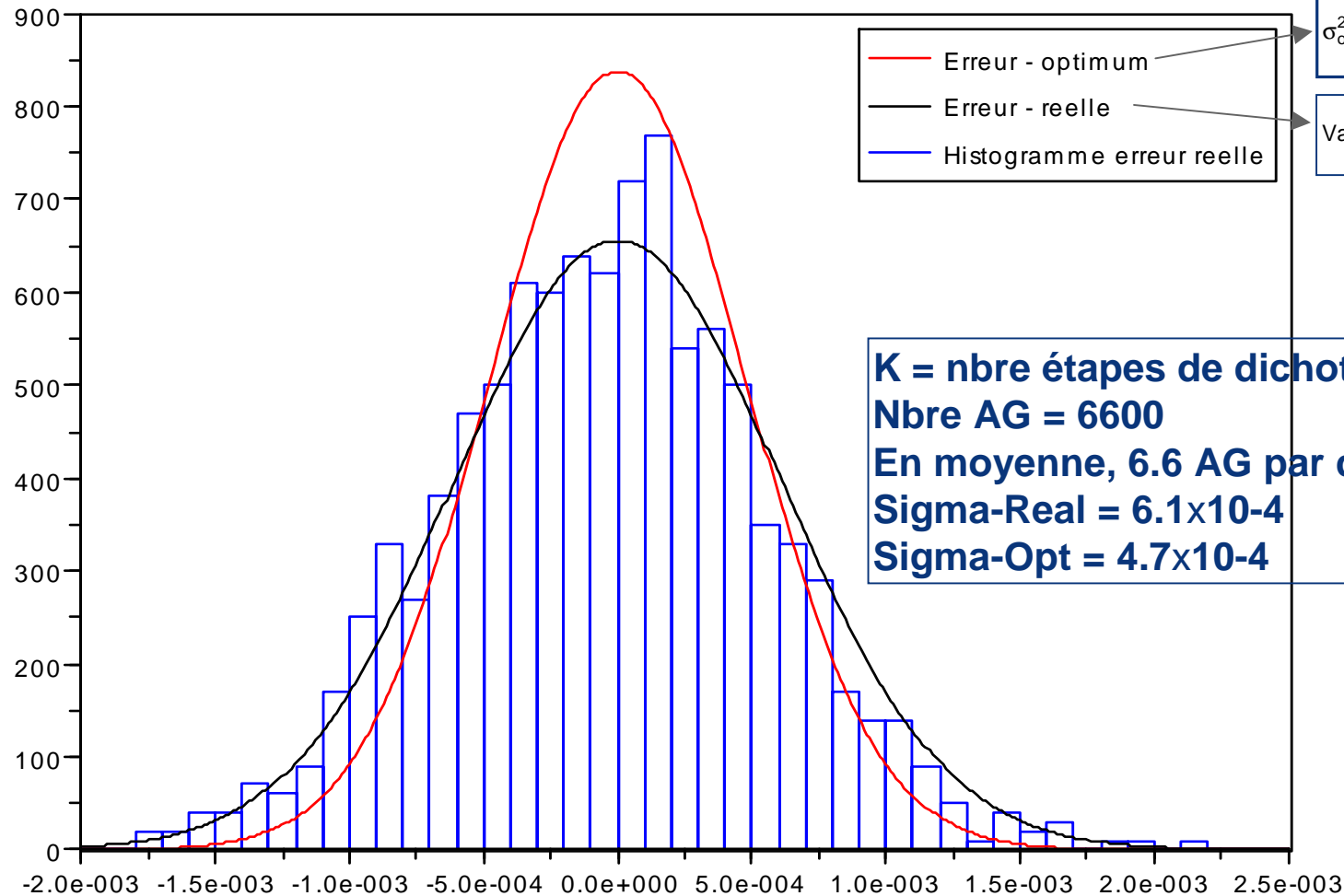
Remarque → pour la suite : AG = Appels à la fonction de déf. G



5.2 Modèle "Crue" : illustration du caractère asymptotique (1/2)

On réalise **$c = 1000$ calculs de notre estimateur** avec **$n = 1000$ directions simulées** (200-800)

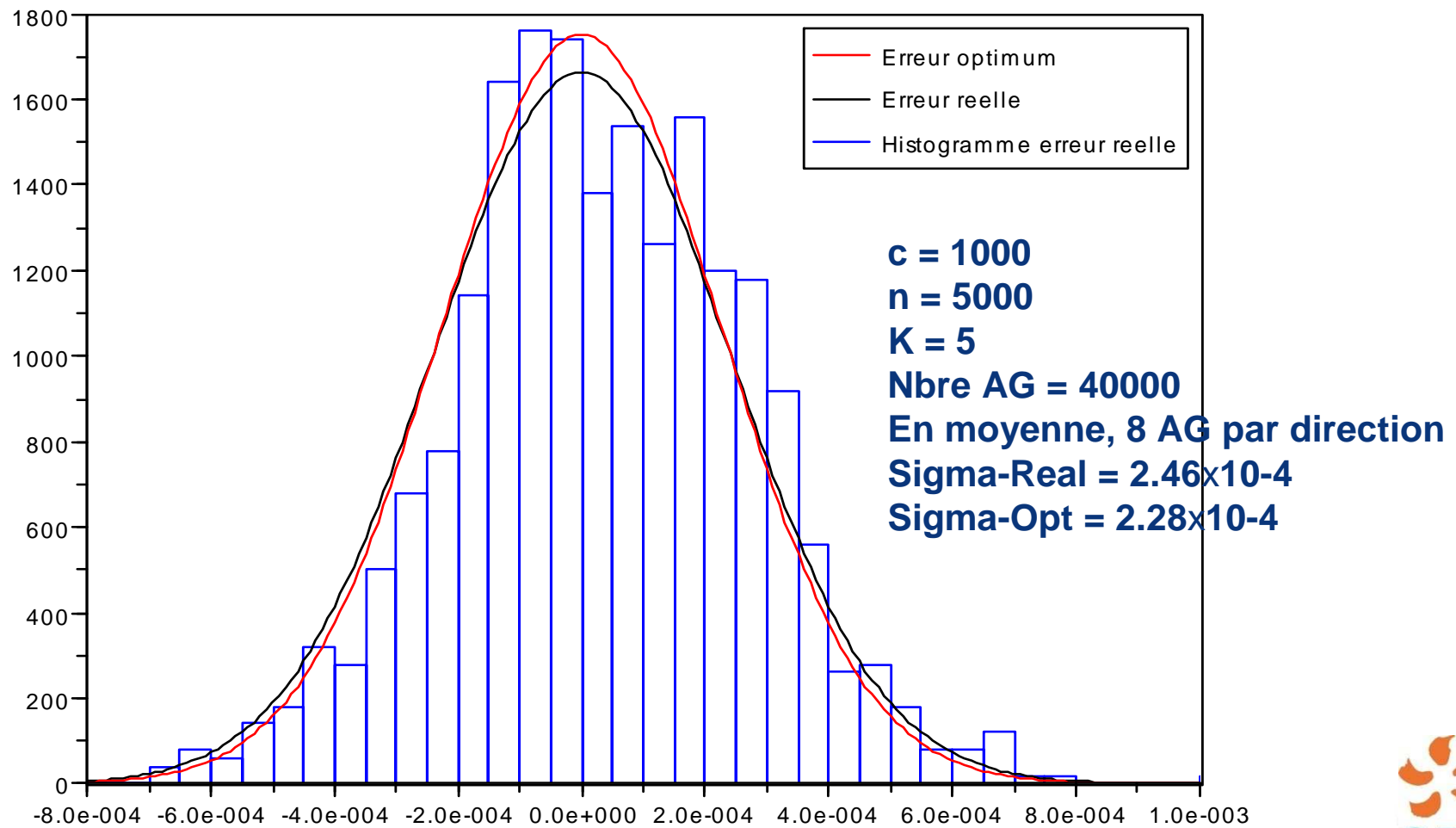
On peut ainsi avoir une bonne idée de la vraie variance de notre estimateur et la comparer à la variance asymptotique optimum que nous avons déterminée pour une allocation optimum des tirages directionnels par strate



[Table des matières](#)



5.2 Modèle "Crue" : illustration du caractère asymptotique (2/2)



[Table des matières](#)



5.2 2-SDA : résultats numériques "Crue" (1/2)

| Méthode | Nbre appels à G | Probabilité de défaillance estimée | Coefficient de variation (en %) |
|--|--------------------------|------------------------------------|---------------------------------|
| Monte Carlo standard | 10 000 | 0.85×10^{-2} | 10.8 |
| | 100 000 | 1.14×10^{-2} | 2.94 |
| | 1 000 000 | 1.16×10^{-2} | 0.922 |
| SD | 10 000 (2800) | 1.13×10^{-2} | 5.89 |
| | 100 000 (27300) | 1.20×10^{-2} | 1.87 |
| | 1 000 000 (274000) | 1.18×10^{-2} | 0.590 |
| Réduction de la dimension par rapport à Ks | 10 000 | 1.16×10^{-2} | 4 |
| | 100 000 | 1.16×10^{-2} | 1.27 |
| | 1 000 000 | 1.17×10^{-2} | 0.409 |
| Réduction de la dimension par rapport à Q | 10 000 | 1.16×10^{-2} | 3.66 |
| | 100 000 | 1.19×10^{-2} | 1.17 |
| | 1 000 000 | 1.17×10^{-2} | 0.376 |
| 2-SDA | 10 000 (600-1900) | 1.18×10^{-2} | 2.80 |
| | 100 000 (1000-13500) | 1.17×10^{-2} | 0.88 |
| | 1 000 000 (50000-200000) | 1.18×10^{-2} | 0.281 |
| Tirage d'importance (<u>autour du point de conception</u>) | 10 000 | 1.18×10^{-2} | 1.73 |
| | 100 000 | 1.19×10^{-2} | 0.56 |
| | 1 000 000 | 1.17×10^{-2} | 0.181 |

Pire
↓
Meilleure

Remarque : On a environ $N.A.G = 6.8 \times N.S$, donc en moyenne 6.8 appels par direction pour SDA
Ici on pourrait coupler réduction de la dimension avec SDA



5.2 2-SDA : résultats numériques "Crue" (2/2)

Attention : pas encore en asymptotique

| Modèle | Méthode | Nbre appels à G | I.C à 95% | L.I.C à 95% |
|--------|-------------|-----------------|--|-----------------------------|
| Crue | 2-SDA (s.r) | 494 (32-48) | $[5.50 \times 10^{-3}; 1.41 \times 10^{-2}]$ | 8.00×10^{-3} |
| | | Min : 288 | $[1.61 \times 10^{-3}; 2.40 \times 10^{-2}]$ | Min : 1.50×10^{-3} |
| | | Max : 773 | $[4.97 \times 10^{-3}; 2.16 \times 10^{-2}]$ | Max : 1.57×10^{-2} |

- Ordre de grandeur de la probabilité estimée correcte vis-à-vis du faible nombre de simulations - résultat équivalent à un calcul FORM-SORM en termes d'ordre de grandeur
- Mais forte variabilité due au faible nombre de tirages : l'intervalle de confiance n'est pas totalement à 95%



5.3 2-SDA : résultats numériques "Cuve3D"

- Application numérique ($p = 3$ variables aléatoires – K_{Ic} Weibull, hauteur $2a$ Weibull et distance à l'interface uniforme / APRP GB) :

| Modèle | Méthode | Nbre appels à G | I.C à 95% | L.I.C à 95% |
|--------|-------------|-----------------|--|-----------------------|
| Cuve3D | 2-SDA (s.r) | 478 (70-68) | $[4.25 \times 10^{-6}; 1.07 \times 10^{-5}]$ | 6.50×10^{-6} |
| Cuve3D | 2-SDA (s.r) | 878 (70-130) | $[5.28 \times 10^{-6}; 9.65 \times 10^{-6}]$ | 4.73×10^{-6} |
| Cuve3D | SD | 1700 (1000) | $[4.5 \times 10^{-6}; 1.18 \times 10^{-5}]$ | 7.31×10^{-6} |
| Cuve3D | SD | 2344 (1000) | $[5.08 \times 10^{-6}; 1.15 \times 10^{-5}]$ | 6.49×10^{-6} |
| Cuve3D | SD | 3300 (2000) | $[6.08 \times 10^{-6}; 1.15 \times 10^{-5}]$ | 5.70×10^{-6} |

Modèles et résultats numériques présentés à titre d'exploration scientifique, ne pouvant en aucun cas être utilisés pour tirer des conclusions sur la sûreté des ouvrages

La probabilité de défaillance étudiée étant conditionnelle à un événement initiateur dont l'ordre de grandeur conventionnel de probabilité d'occurrence est $< 10^{-4}$, toutes les valeurs de probabilités présentées doivent être multipliées par autant

toutes les probabilités doivent être multipliées par 10^{-4}

- Ordre de grandeur de la probabilité estimée correcte vis-à-vis du faible nombre de simulations - résultat équivalent à un calcul FORM-SORM en termes d'ordre de grandeur
- Pour une même longueur d'intervalle de confiance, SDA permet de **réduire d'un facteur 5** le nombre d'appels à la fonction de défaillance par rapport à SD
- Mais forte variabilité due au faible nombre de tirages : l'intervalle de confiance n'est pas totalement à 95%

[Table des matières](#)





Perspective

- Etude bootstrap
- Méthode estimations à noyaux

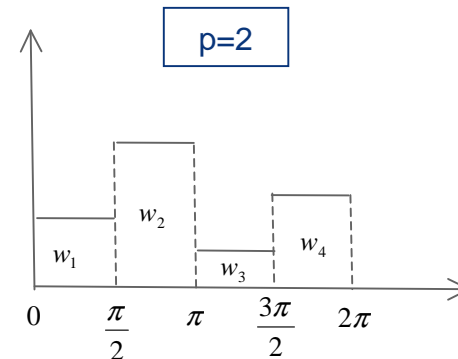


2-SDA : Point de vue tirage préférentiel

$$P_f = E(1_{g(RA) < 0}) = E\left(E(1_{g(RA) < 0} | A)\right) = E(\xi(A)) \quad \nearrow A \approx f$$

$$= E\left(\frac{\xi(A') f(A')}{p(A')}\right) \quad \rightarrow A' \approx p$$

$$p(x) = \sum_{i=1}^m 1_{x \in q_i} \frac{w_i}{m(q_i)}$$





2-SDA : Point de vue tirage préférentiel

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\xi(A'_i) f(A'_i)}{p(A'_i)}$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i^2 \sigma_i^2}{n w_i} + \text{Var}\left(\frac{\alpha_N}{w_N}\right)$$

$$\alpha_i = P(g(RA) < 0 \cap A \in q_i)$$

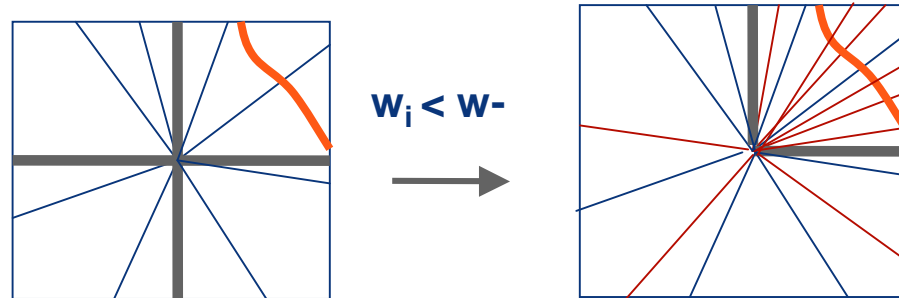
$$P(N = i) = w_i$$

On a un terme de Variance supplémentaire par rapport à la variance de notre méthode !
Conséquence du fait que dans cette procédure l'allocation par strate est en moyenne w_i et non pas exactement w_i

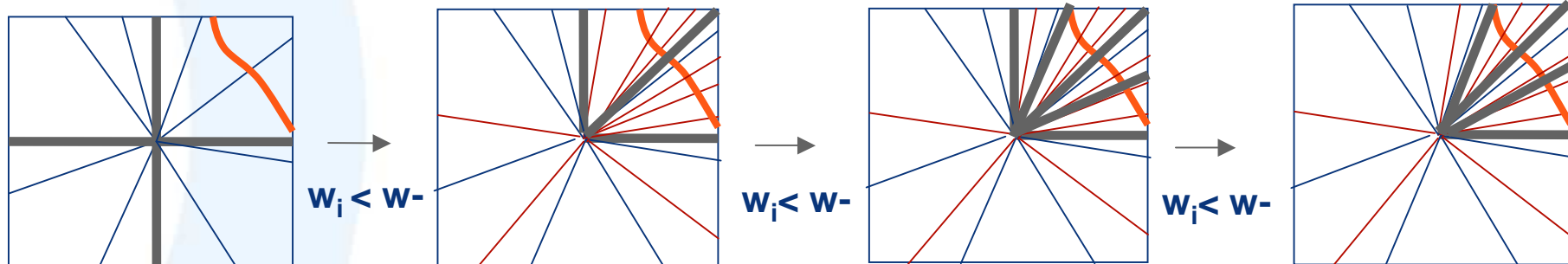


SDA avec regroupement et divisions des strates

2 étapes d'adaptation
on regroupe uniquement :



L étapes d'adaptation
on regroupe et divise strates :



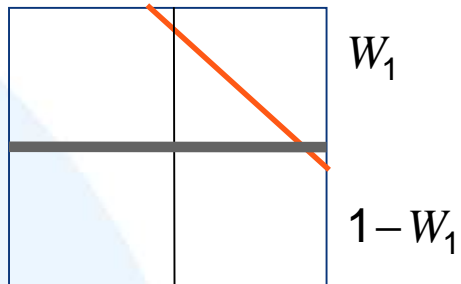
Estimateur :

$$\hat{P}_f = \sum_{i=1}^{m^L} \frac{\rho_i^L}{N_i^L} \sum_{j=1}^{N_i^L} P_{i,j}$$



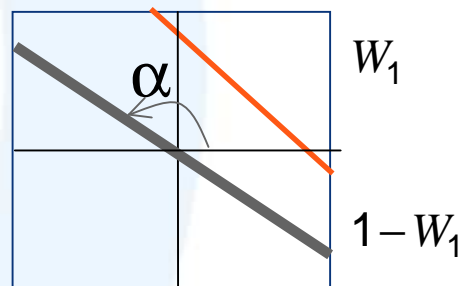
Étude Stratification $(p=2, m=2)$

(1)



- . Strate horizontale fixé
- . Optimisation en W

(2)

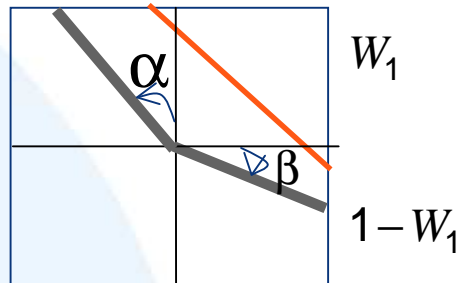


- . W fixé
- . Optimisation en α



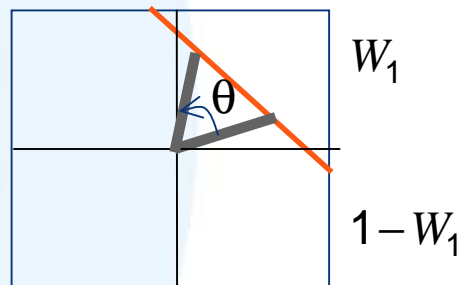
Étude Stratification $(p=2, m=2)$

(3)



. W fixé
. Optimisation en α et β
(Puis éventuellement en W)

(4)



. W fixé
. Optimisation en θ
(Puis éventuellement en W)

Symétrie implique sûrement que optimum (3) est du type (4)



Étude Stratification : un angle

($p=2, m=2, p_{def}= 10^{-6}$)

| | |
|---------|----------|
| | K |
| $1-W_1$ | α |
| | W_1 |

- **W fixé**
- **Optimisation en α : càd trouver le qui minimise la variance asymptotique optimum**

$$\alpha \in [0, 2\pi]$$

Minimiser :

$$\sigma_{opt}^2(\alpha) = \frac{1}{4} \left(\sqrt{V_1(\alpha)} + \sqrt{V_2(\alpha)} \right)^2$$

$$\sigma_{opt}^2 = \frac{1}{m^2} \left(\sum_{i=1}^m \sqrt{v_i} \right)^2$$

$$V_1(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha-\pi}^{\alpha} I_{J0,\pi l}(\theta) \exp\left(-\frac{K^2}{\sin^2(\theta)}\right) d\theta \\ - \left(\frac{1}{\pi} \int_{\alpha-\pi}^{\alpha} I_{J0,\pi l}(\theta) \exp\left(-\frac{K^2}{2 \sin^2(\theta)}\right) d\theta \right)^2 \end{cases}$$

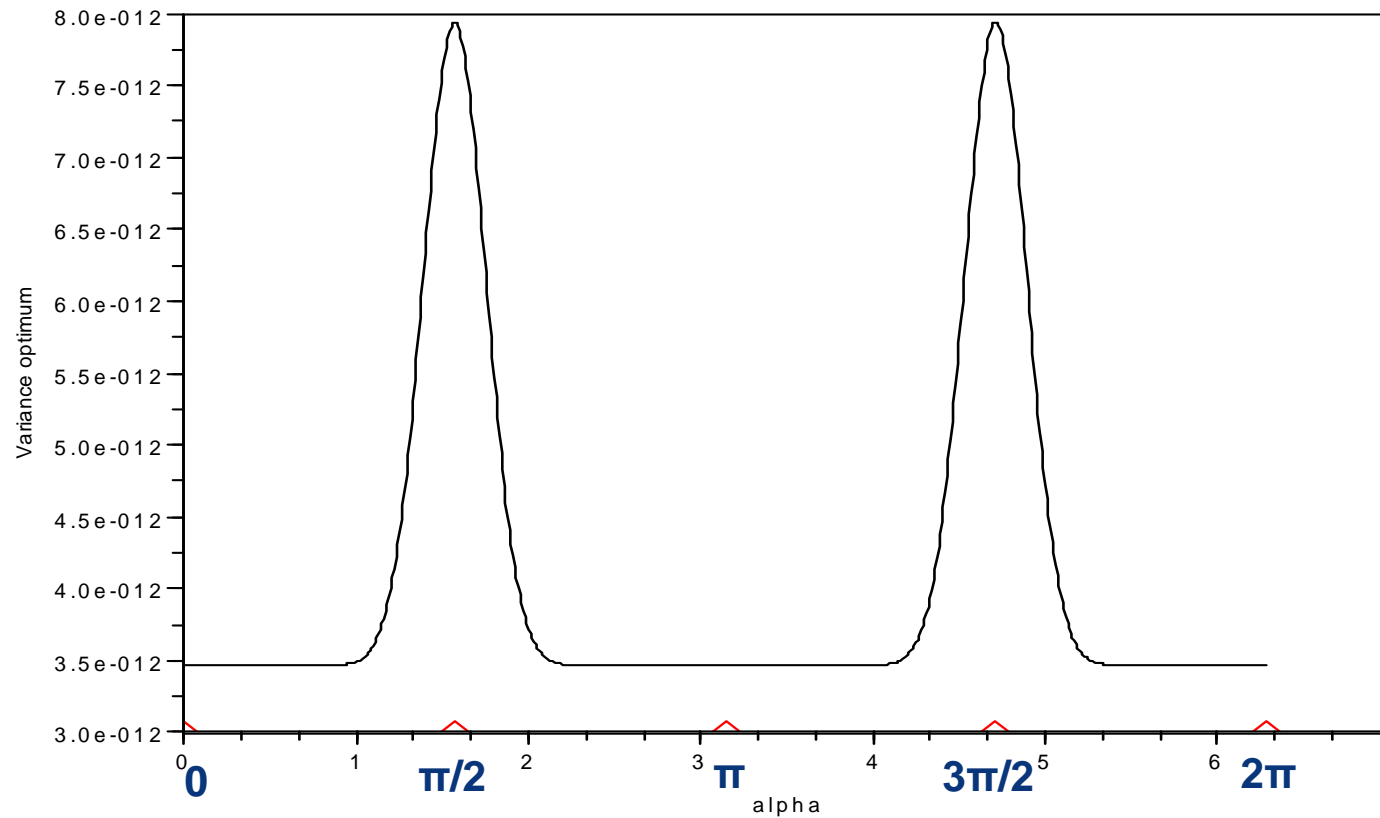
$$V_2(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} (I_{J0,\pi l}(\theta) + I_{J2\pi,3\pi l}(\theta)) \exp\left(-\frac{K^2}{\sin^2(\theta)}\right) d\theta \\ - \left(\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} (I_{J0,\pi l}(\theta) + I_{J2\pi,3\pi l}(\theta)) \exp\left(-\frac{K^2}{2 \sin^2(\theta)}\right) d\theta \right)^2 \end{cases}$$



Étude Stratification : un angle

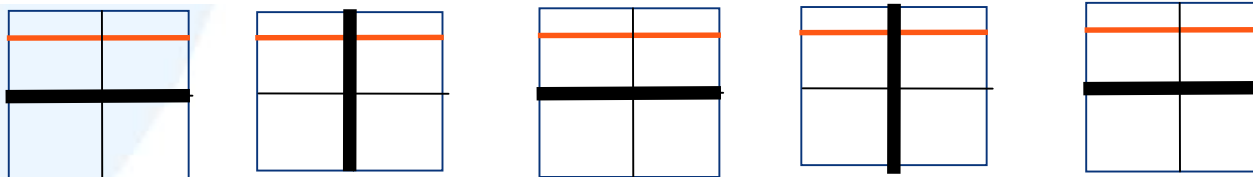
($p=2$, $m=2$, $p_{def}= 10^{-6}$)

Variance asymptotique optimum en fonction de alpha



| | |
|-----------|----------|
| | K |
| $1 - W_1$ | α |
| | W_1 |

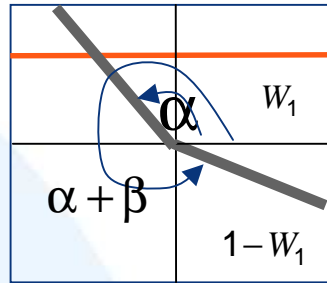
$$\alpha \in [0, 2\pi]$$





Étude Stratification : deux angles

($p=2, m=2, p_{def}= 10^{-6}$)



. W fixé
 . Optimisation en α et β
 (Puis éventuellement en W)

$$\alpha \in [0, \pi]$$

$$\beta \in [0, 2\pi]$$

$$\sigma_{opt}^2 = \frac{1}{m^2} \left(\sum_{i=1}^m \sqrt{v_i} \right)^2$$

Minimiser :

$$\sigma_{opt}^2(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \left(\sqrt{V_1(\alpha, \beta)} + \sqrt{V_2(\alpha, \beta)} \right)^2$$

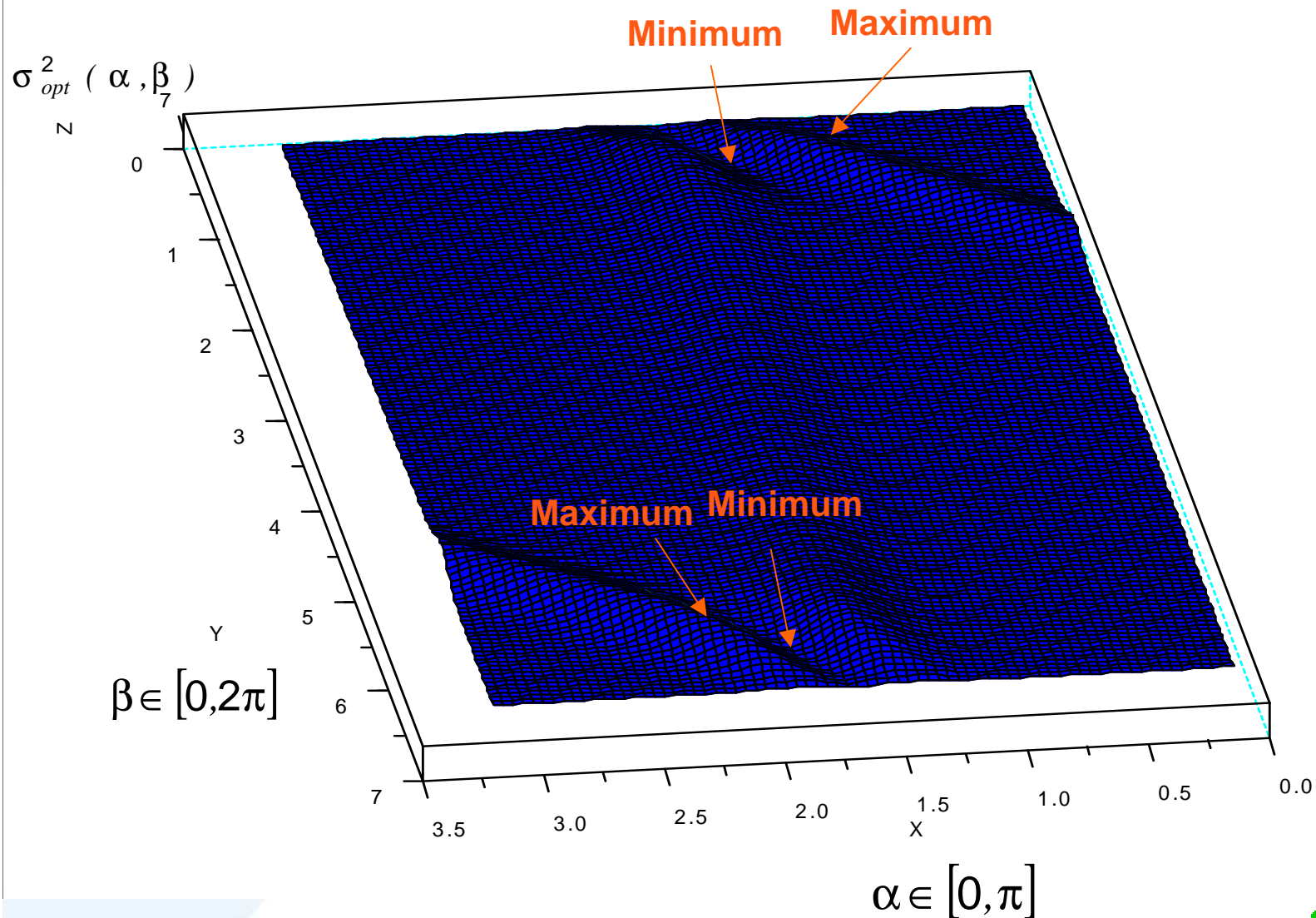
$$V_1(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\alpha+\beta} (I_{|0, \pi|}(\theta) + I_{|2\pi, 3\pi|}(\theta)) \exp\left(-\frac{K^2}{\sin^2(\theta)}\right) d\theta \\ - \left(\frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\alpha+\beta} (I_{|0, \pi|}(\theta) + I_{|2\pi, 3\pi|}(\theta)) \exp\left(-\frac{K^2}{2 \sin^2(\theta)}\right) d\theta \right)^2 \end{cases}$$

$$V_2(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi - \beta} \int_{\alpha+\beta}^{\alpha+2\pi} (I_{|0, \pi|}(\theta) + I_{|2\pi, 3\pi|}(\theta)) \exp\left(-\frac{K^2}{\sin^2(\theta)}\right) d\theta \\ - \left(\frac{1}{2\pi - \beta} \int_{\alpha+\beta}^{\alpha+2\pi} (I_{|0, \pi|}(\theta) + I_{|2\pi, 3\pi|}(\theta)) \exp\left(-\frac{K^2}{2 \sin^2(\theta)}\right) d\theta \right)^2 \end{cases}$$



Étude Stratification : deux angles

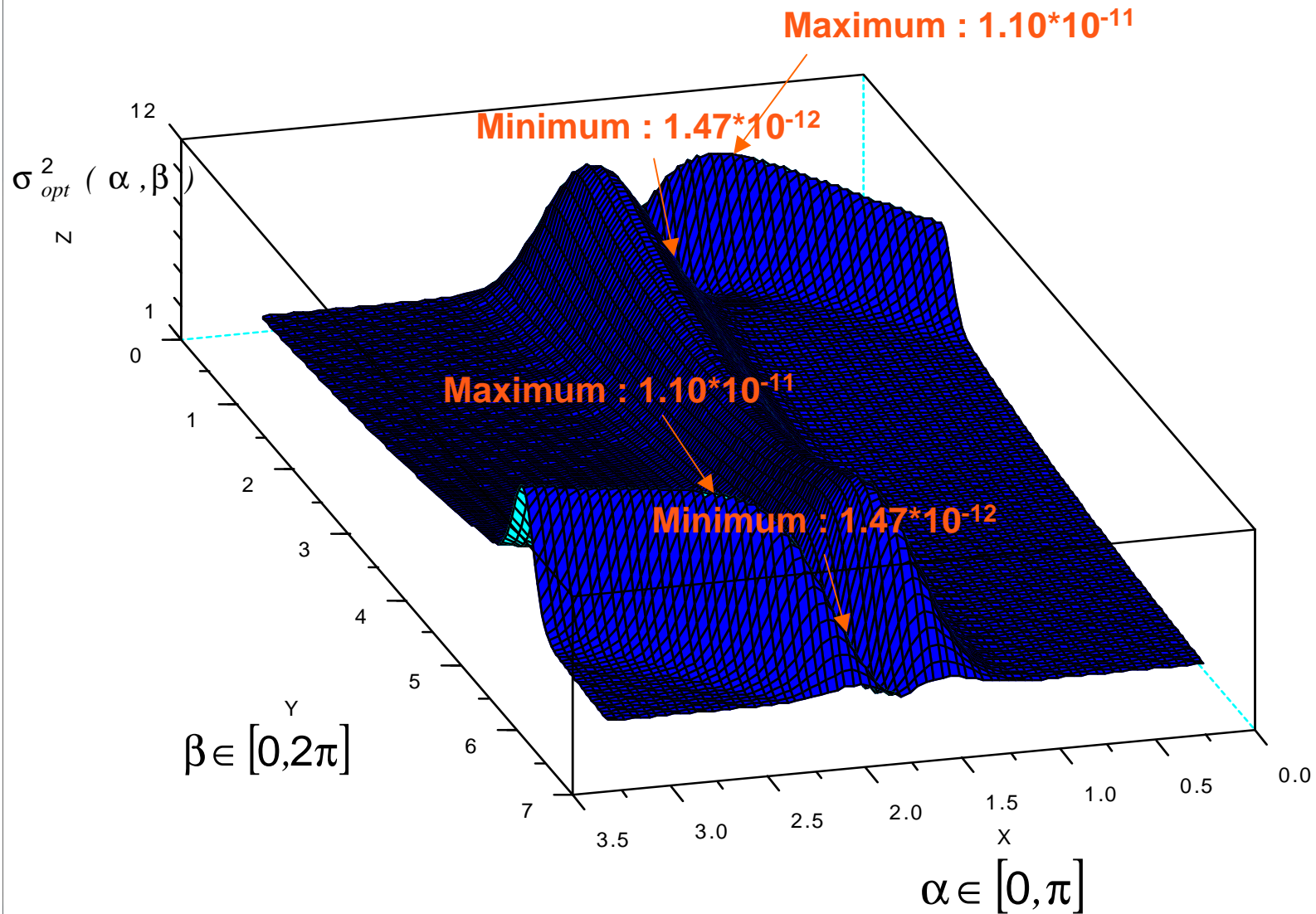
($p=2$, $m=2$, $p_{def}= 10^{-6}$)





Étude Stratification : deux angles

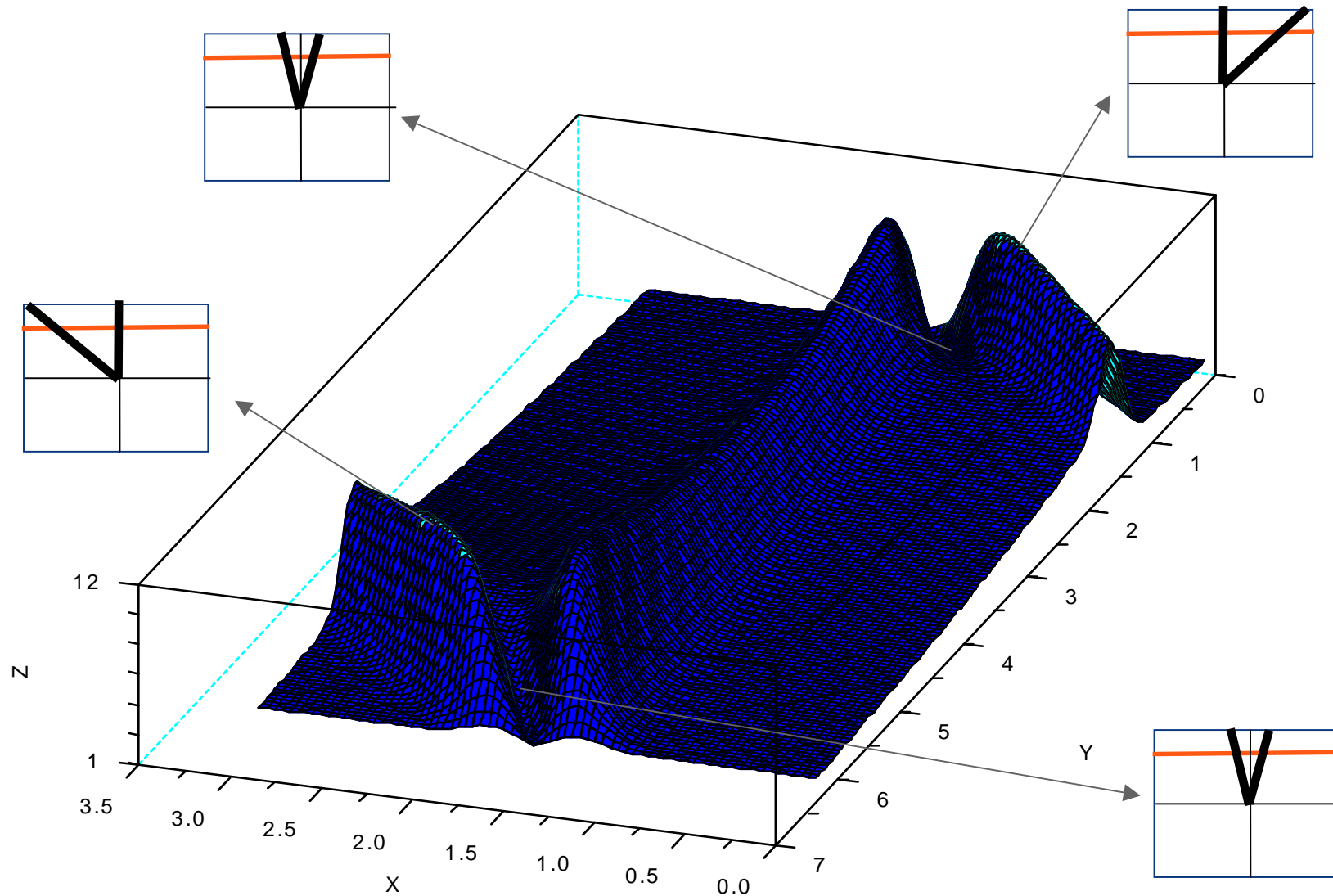
($p=2$, $m=2$, $p_{def}= 10^{-6}$)





Étude Stratification : deux angles

($p=2$, $m=2$, $p_{def}= 10^{-6}$)





Résultats Numériques Crue : 2-SDA

Modèle :

$$G(Z_v, Q, K_s, Z_m) = H_d + Z_b - Z_v - \left(\frac{Q}{B \times K_s \times \sqrt{\frac{Z_m - Z_v}{L}}} \right)^{3/5}$$

1. Nous allons comparer la variance asymptotique attendue à la vraie variance de notre estimateur 2-SDA
2. Le critère d'arrêt étant valable pour des probabilités faibles nous allons déterminer numériquement le nombre raisonnable d'étapes de dichotomie à réaliser. Ce qui nous permettra de voir également la sensibilité de l'estimation au nombre d'appels à la fonction de défaillance.
3. Nous allons comparer les résultats obtenus par les méthodes suivantes :
 - Monte-Carlo Standard
 - Réduction de la dimension par rapport soit à Q soit à Ks
 - Simulation Directionnelle
 - 2-SDA
 - Tirage d'importance : tirages gaussiens autour du point de conception (FORM)
 - 'Chen-method'



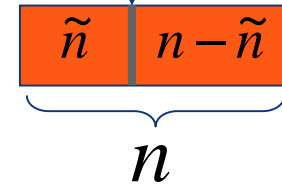
Annexe : résultats asymptotiques supplémentaires

$$\tilde{n} = \alpha n$$

Suffisamment grand pour max. d'information

Pas trop grand pour marge de manœuvre sur les \tilde{W}_i

Optimum ?



Notations :

$$P_i = P(g(RA) < 0 | A \in q_i)$$

$$P_{i,j} = P(g(RA_j) < 0 | A_j \in q_i)$$

$$m_{k,i} = E(P_i^k)$$

$$v_i = \text{Var}[P(g(RA) < 0 | A \in q_i)]$$

$$\tilde{v}_i^{k-1} = \tilde{p}_{q_i}^{2k-1} - \tilde{p}_{q_i}^{k-1}$$

$$\tilde{p}_{q_i}^2 = \frac{1}{N_i^{k-1}} \sum_{j=1}^{N_i^{k-1}} P_{i,j}^2$$

$$\tilde{p}_{q_i} = \frac{1}{N_i^{k-1}} \sum_{j=1}^{N_i^{k-1}} P_{i,j}$$

$$\tilde{W}_i = \frac{\sqrt{\tilde{v}_i}}{\sum_{j=1}^m \sqrt{\tilde{v}_j}}$$

\tilde{W}_i converge vers une gaussienne ?



Annexe : résultats asymptotiques supplémentaires

TCL vectoriel

$$\sqrt{\tilde{n}} \left[\begin{pmatrix} \tilde{p}_{q_i} \\ \tilde{p}_{q_i}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_{1,i} \\ m_{2,i} \end{pmatrix} \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{Loi}} \mathbf{N}(0, Q_i)$$

$$Q_i = \frac{1}{w_i} \begin{pmatrix} m_{2,i} - m_{1,i}^2 & m_{3,i} - m_{1,i}m_{2,i} \\ m_{3,i} - m_{1,i}m_{2,i} & m_{4,i} - m_{2,i}^2 \end{pmatrix}$$

Delta-Méthode

$$\sqrt{\tilde{n}} (\tilde{V}_i - v_i) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{Loi}} \mathbf{N}(0, \sigma_i^2)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{w_i} (m_{4,i} - 4m_{1,i}m_{3,i} + 8m_{1,i}^2m_{2,i} - m_{2,i}^2 - 4m_{1,i}^4)$$

Indépendance des \tilde{V}_i

Fonction caractéristique

$$\sqrt{\tilde{n}} (\tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{v}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{Loi}} \mathbf{N}(0, \Sigma)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m) \quad \tilde{\mathbf{V}} = (\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_m)$$



Annexe : résultats asymptotiques supplémentaires

$$\sqrt{\tilde{n}} (\tilde{V} - v) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{Loi}} \mathbf{N}(0, \Sigma)$$

Delta-Méthode



Delta-Méthode



$$w^{opt} = (w_1^{opt}, \dots, w_m^{opt}) \quad \tilde{W} = (\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_m)$$

$$\sqrt{\tilde{n}} (\tilde{W} - w^{opt}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{Loi}} \mathbf{N}(0, \Gamma)$$

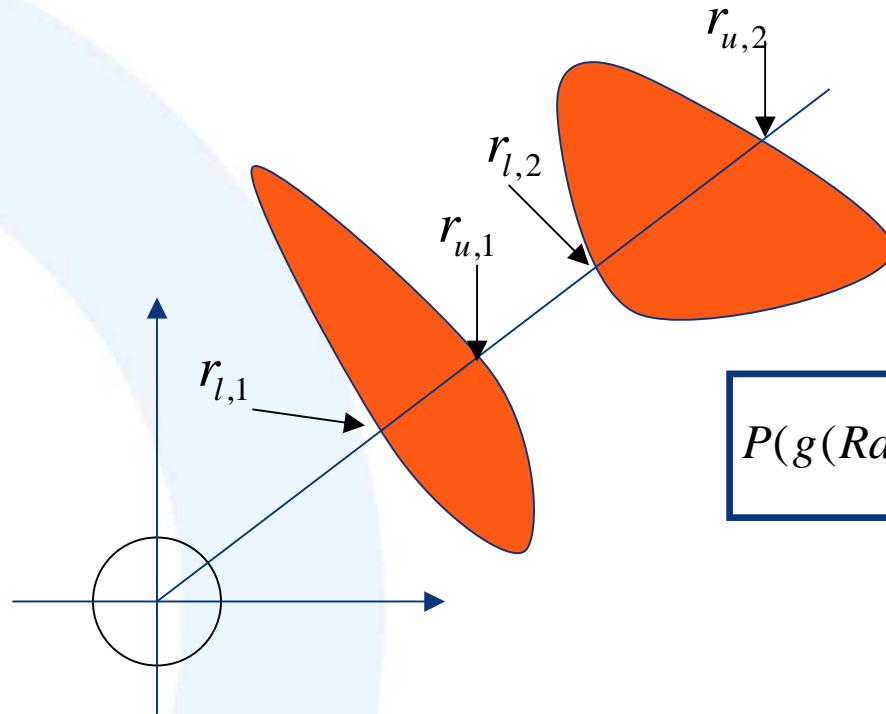
$$\Gamma = J_{\psi} \Sigma J_{\psi}$$

$$\sqrt{\tilde{n}} (\tilde{W}_i - w_i^{opt}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{Loi}} \mathbf{N}(0, \rho_i)$$

$$\rho_i = J_{\varphi_i} \Sigma J_{\varphi_i}$$

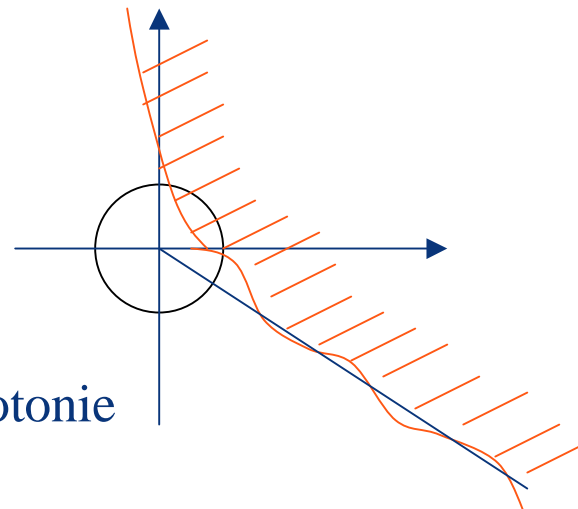


Annexe : zéros



Sans monotonie

$$P(g(Ra) \leq 0) = \sum_{i=1}^m P(R \in [r_{l,i}, r_{u,i}]) = \sum_{i=1}^m \chi_p^2(r_{u,i}^2) - \chi_p^2(r_{l,i}^2)$$



Avec monotonie



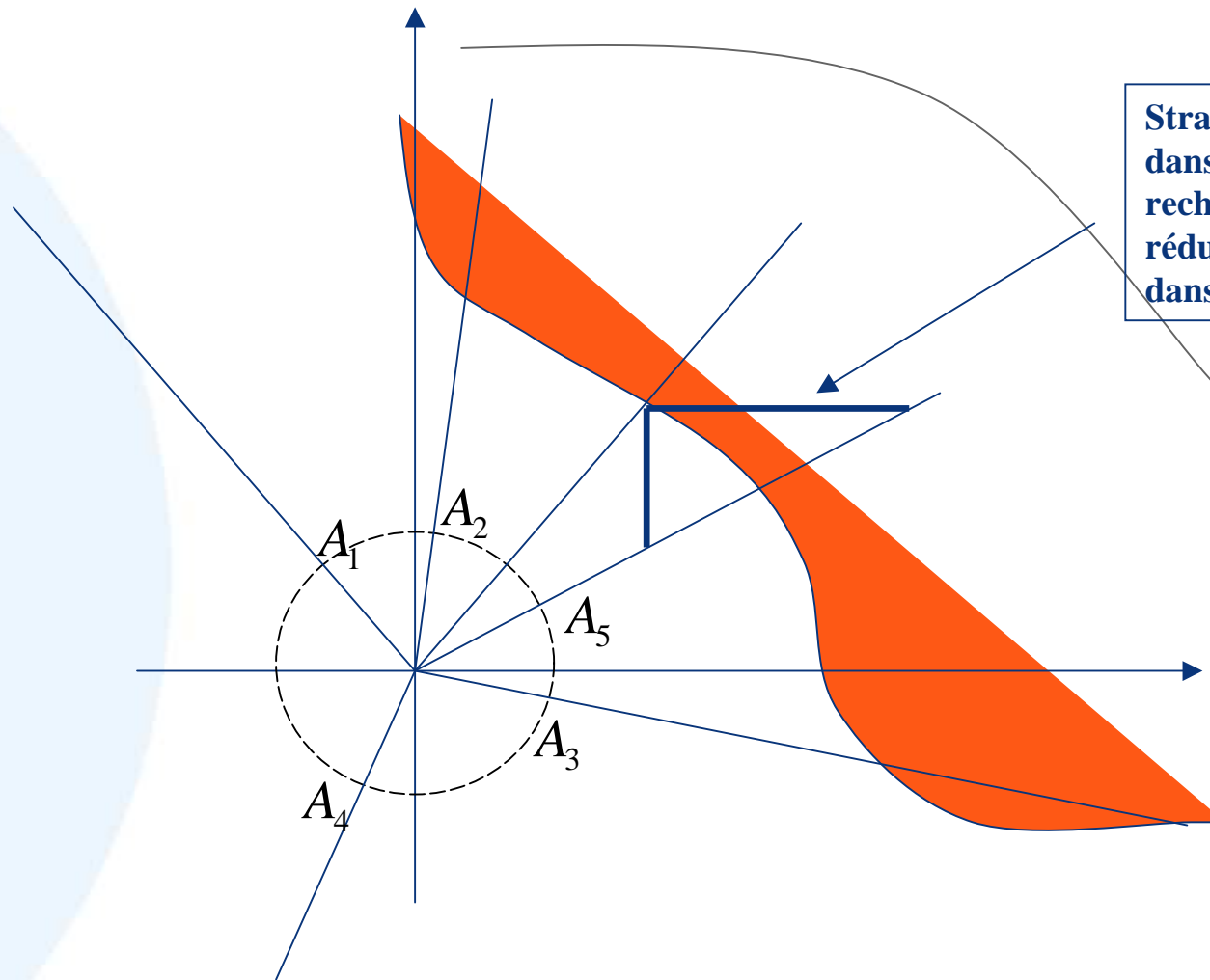
Annexe : zéros

| Méthode | Ordre |
|-----------------------------------|-----------|
| Dichotomie | 1 |
| Sécante | 1,618.... |
| Interpolation quadratique inverse | \ |
| Brent | \ |

Hypothèses
de régularité



Annexe : simulation directionnelle



Stratégie à intégrer dans l'algorithme de recherche de zéros pour réduire l'intervalle initial dans le cas monotone



Annexe : preuve de réduction

$$\boxed{[E(f(X, Y) / X)]^2 \leq E(f(X, Y)^2 / X)}$$

↓ Inégalité de Jensen

$$\boxed{Var(E(f(X, Y) / X)) \leq Var(f(X, Y))}$$

$1_{]-\infty, 0]}$ A R

$$\Rightarrow Var(E(1_{g(RA) \leq 0} / A)) = Var(P(g(RA_i) \leq 0 / A_i)) \leq Var(1_{g(RA) \leq 0})$$

$$\theta_{SD} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(g(RA_i) \leq 0 / A_i)$$

$$\theta_{MC} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{g(U_i) \leq 0}$$

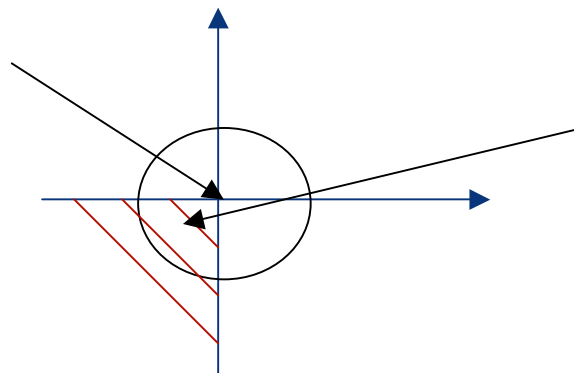
$$\boxed{Var(\theta_{SD}) \leq Var(\theta_{MC})}$$



Annexe : monotonie et simulation directionnelle

1. Sans autre hypothèse que la monotonie globale, aucune prévision sur le nombre de racines sauf dans le cadran « N-E »
2. La monotonie globale nous permet d'envisager une sélection des directions à explorer afin d'éviter des recherches de zéros inutiles et coûteuses

Structure fiable



Pas de tirage dans ces directions