

# Modélisation de la période de jeunesse dans le cadre des risques concurrents

Yann DIJOUX

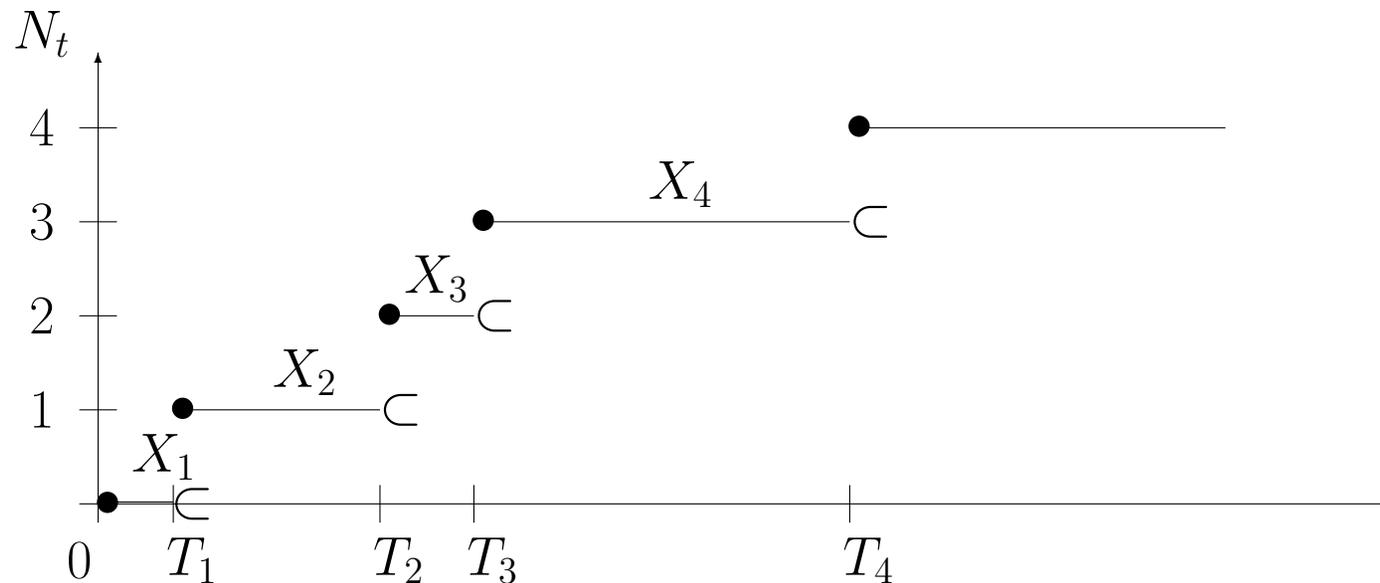


# Plan

---

1. Modélisation de la période de jeunesse à l'aide d'intensités en baignoire
  - Modélisation du processus des défaillances
  - Les intensités en baignoire
  - Généralisation des modèles classiques d'âges virtuels
2. Motivation pour proposer une modélisation faisant intervenir les risques concurrents
3. Modélisation du processus sachant le type de chaque maintenance
4. Modélisation du processus en absence du type de chaque maintenance
5. Conclusion

# Notations



- les instants de défaillance :  $\{T_i\}_{i \geq 1}$
- les durées inter-défaillances :  $X_i = T_i - T_{i-1}$ ,  $i \geq 1$
- le processus de comptage des défaillances :  $\{N_t\}_{t \geq 0}$ ,  $N_t =$  nombre de pannes avant l'instant  $t$
- Une CM a lieu après chaque défaillance.
- On ne prend pas en compte les durées des réparations.
- On ne peut pas observer deux défaillances au même instant.

# Modélisation du processus des défaillances

---

## l'intensité de défaillance : $\lambda_t$

$$\lambda_t = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} P(N_{t+dt} - N_t = 1 | \mathcal{H}_t)$$

where  $\mathcal{H}_t$  est l'histoire du processus à l'instant  $t$ .

**Processus auto-excité** :  $\mathcal{H}_t = \sigma(\{N_s\}_{0 \leq s \leq t})$ .

$\Rightarrow \lambda_t$  définit entièrement le processus des défaillances.

Avant la première panne, l'intensité de défaillance est une fonction déterministe et continue du temps  $\lambda(t)$ , appelée intensité initiale, taux de hasard de  $T_1$

## la fonction de vraisemblance

La fonction de vraisemblance associée à l'observation de  $n$  défaillances sur l'intervalle  $[0, t]$  s'écrit :

$$L_t(\theta) = \left[ \prod_{i=1}^n \lambda_{t_i}(i-1; t_1, \dots, t_{i-1}) \right] \exp \left( - \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda_u(i-1; t_1, \dots, t_{i-1}) du \right)$$

# Modèles classiques

---

## Le modèle de réparation minimale ou modèle As Bad As Old (ABAO)

- Chaque maintenance remet le système en marche dans l'état exact où il était juste avant la défaillance.
- Le processus de défaillance correspond alors à un processus de Poisson non homogène (NHPP).

$$\lambda_t = \lambda(t)$$

## Le modèle de réparation parfaite ou modèle As Good As New (AGAN)

- Chaque maintenance remet le système à neuf.
- Le processus de défaillance correspond alors à un processus de renouvellement (RP).

$$\lambda_t = \lambda(t - T_{N_t})$$

La réalité se situe entre les modèles ABAO et AGAN

## Les modèles d'âge virtuel

---

Après la  $i^{\text{ème}}$  panne, le système se comporte comme un système neuf ayant survécu un âge  $A_i$ , appelé **âge effectif**.

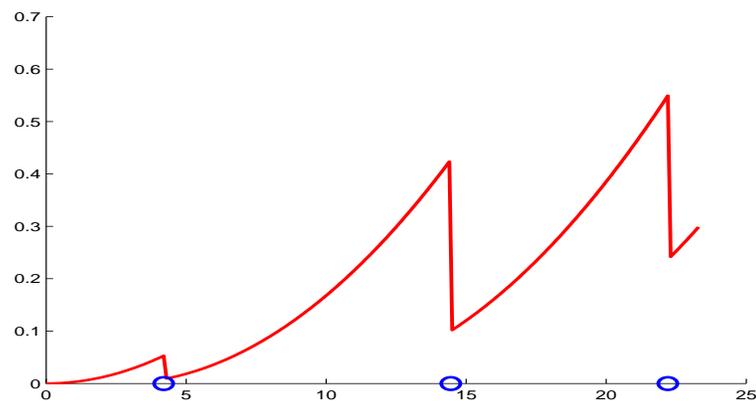
$$\forall i \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad P(X_{i+1} > t | X_1, \dots, X_i) = P(Y > A_i + t | Y > A_i) = \frac{S(A_i + t)}{S(A_i)}$$

où  $S$  est la fonction de survie associée à  $Y$ , de même loi que  $X_1$ .

$$\lambda_t = \lambda(t - T_{N_{t-}} + A_{N_{t-}})$$

- ABAO :  $A_i = T_i$
- AGAN :  $A_i = 0$
- Le modèle de réduction arithmétique de l'âge ( $ARA_1$ ) :  $A_i = (1 - \rho)T_i$
- Le modèle de réduction arithmétique de l'âge de mémoire infinie ( $ARA_\infty$ ) :  
 $A_i = (1 - \rho)(A_{i-1} + X_i)$
- Le modèle de Brown-Prochan (BP) : réparation parfaite avec probabilité  $p$  et minimale avec probabilité  $1 - p$ .  
 $\rho$  comme  $p$  sont appelés **efficacités de maintenance**.

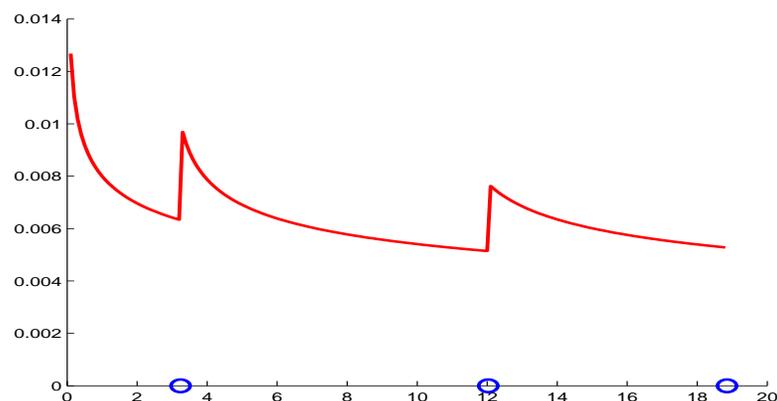
# Nécessité d'adapter les âges effectifs aux intensités non croissantes



Usure intrinsèque du système

⇒ Les réparations sont efficaces.

FIGURE 1 – modèle  $ARA_1$  et intensité croissante

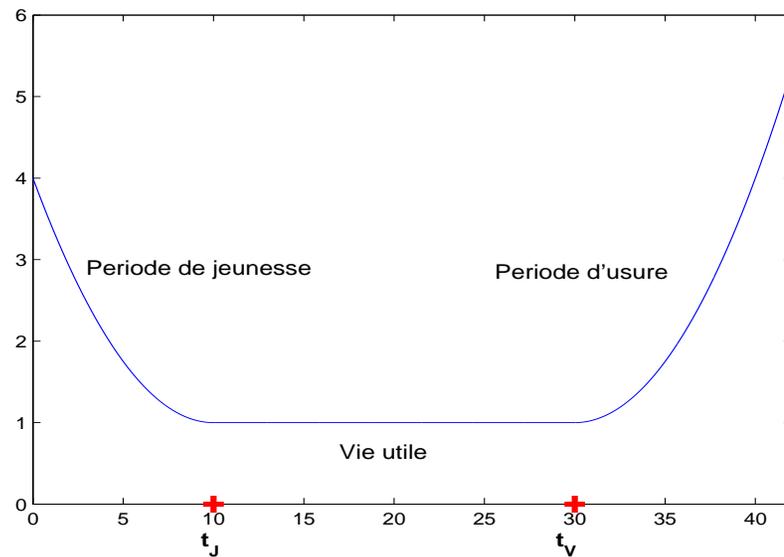


Le système s'améliore au cours du temps.

⇒ Les réparations sont nuisibles.

FIGURE 2 – modèle  $ARA_1$  et intensité décroissante

# Les intensités en baignoire

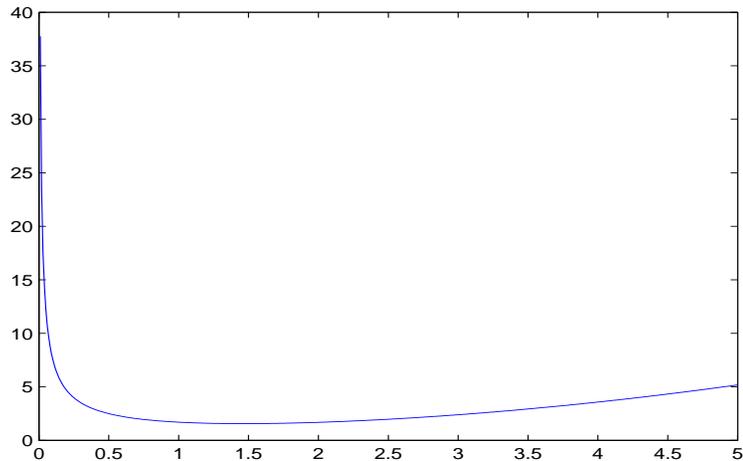


$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda + \alpha_J \beta_J (t_J - t)^{\beta_J - 1} & \text{si } t \leq t_J \\ \lambda & \text{si } t_J < t < t_V \\ \lambda + \alpha_V \beta_V (t - t_V)^{\beta_V - 1} & \text{si } t_V \leq t \end{cases}$$

- Période de jeunesse  $[0; t_J]$  : Système en rôtage,  $\lambda$  décroissant.
- Période de vie utile  $]t_J; t_V[$  :  $\lambda$  constant.
- Période d'usure du système  $[t_V; \infty[$  :  $\lambda$  croissant.
- Continuité de l'intensité en  $t_J$  et  $t_V$ .

# Autres exemples d'intensités en baignoire

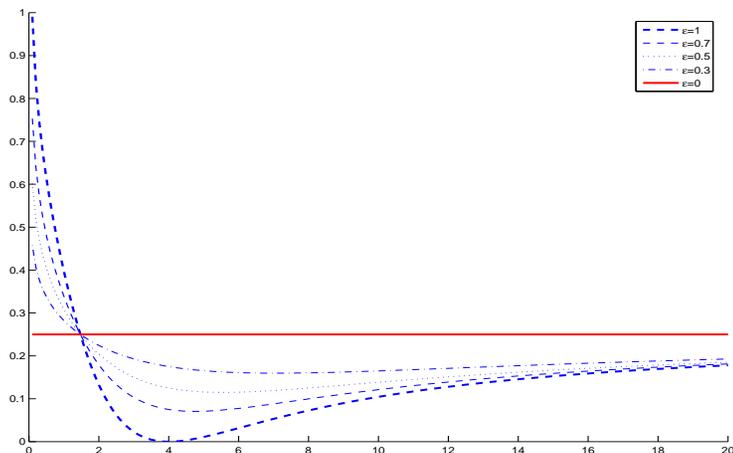
**Intensité Xie-Lai** : Somme de deux intensités de Weibull de monotonies différentes.



$$\lambda(t) = b(at)^{b-1} + d(ct)^{d-1}$$

$$a, c > 0, \quad b > 1, \quad d < 1$$

**Intensité Idée** : perturbation d'un facteur  $\epsilon$  d'un modèle exponentiel de paramètre  $\eta$ .



$$\lambda(t) = \frac{1}{\eta} \left[ 1 - \epsilon \frac{1 + \ln\left(\frac{t}{\eta}\right)}{1 + \epsilon \frac{t}{\eta} \ln\left(\frac{t}{\eta}\right)} \right]$$

## Efficacité en période de jeunesse

---

**Maintenance ABAO** :  $A_n = T_n$

**Maintenance AIA** : Arithmetic Increase of Age : augmentation des âges effectifs après une maintenance :  $A_1 = T_1 + \rho(t_J - T_1)$ .

$$A_n = A_{n-1} + X_n + \rho(t_J - A_{n-1} - X_n)$$

→ Même signification du paramètre  $\rho$  et expression explicite des âges.

**Maintenance BTBP** : Adaptation du modèle BP classique, avec une maintenance restaurant le système en  $t_J$  avec une probabilité  $p$  ou une maintenance minimale avec une probabilité  $1 - p$  :

$$B_i = \begin{cases} 1, & \text{si la maintenance est optimale et restaure le système en } t_J \\ 0, & \text{si la maintenance est minimale} \end{cases}$$

$$A_n = B_n t_J + (1 - B_n)(A_{n-1} + X_n)$$

→ Même signification du paramètre  $p$  et expression explicite des âges.

## Efficacité en période d'usure

---

**Maintenance ABAO** :  $A_n = A_{n-1} + X_n$

**Maintenance ARA<sub>∞</sub>** : Adaptation du modèle classique en translatant d'une durée  $t_J$  :

$$A_n = t_J + (1 - \rho_V)(A_{n-1} + X_n - t_J)$$

→ Exactement la même écriture que le modèle *AIA*.

**Maintenance ARA<sub>1</sub>** : Même définition que dans le cas classique :

$$A_n = A_{n-1} + (1 - \rho_V)X_n$$

→ Il est nécessaire de modifier la première maintenance en période d'usure pour éviter de revenir en période de jeunesse.

**Maintenance BTBP** : On conserve exactement le même principe que le modèle BTBP en période de jeunesse : une maintenance est optimale et ramène le système en  $t_J(p)$  ou est minimale  $(1 - p)$

→ L'écriture des âges effectifs est identique à celle en période de jeunesse.

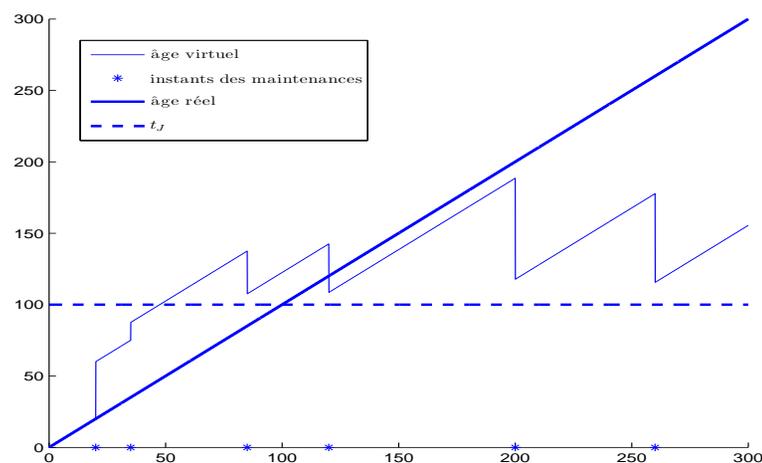
## Modèle complet $AIA(\rho_J)$ - $ARA_\infty(\rho_V)$

→ les effets de la maintenances différent selon la période.

→ Maintenance AIA avec efficacité  $\rho_J$  en période de jeunesse et maintenance  $ARA_\infty$  avec efficacité  $\rho_V$  ensuite.

$$\rho_i = \begin{cases} \rho_J & \text{en période de jeunesse,} \\ \rho_V & \text{en période d'usure,} \end{cases} \quad (1)$$

$$A_n = T_n + \sum_{i=0}^{n-1} \rho_{n-i} \left[ \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \rho_{n-j}) \right] (t_J - T_{n-i})$$



## Généralisations et étude

---

→ Ces modèles sont très facilement généralisables à deux types de maintenances (correctives et préventives). Les efficacités peuvent être alors différenciées (ou non).

→ En supposant uniquement des MC ou des MC et des MP déterministes, il est relativement facile de calculer la fonction de vraisemblance afin de faire de l'estimation.

→ Ces estimations sont bien plus complexes si on considère des MC et des MP conditionnelles du fait de la dépendance entre les deux types de maintenance.

→ Une étude d'un jeu de données réelles a été effectuée sur des données EDF en utilisant les intensités  $I_{dée}$  et des effets  $AIA(\rho_J, \rho_J) - ARA_1(\rho_V, \rho_V)$

# Application à des données réelles I

---

## Données

- Composant d'une unité de production électrique soumis à des MC et MP déterministes.
- 17 systèmes similaires et indépendants étudiés sur 15 ans : 16 MP, 12 MC et présence de censure.
- Mise en évidence d'une période de jeunesse estimée par avis d'expert à 1000 jours.

## Choix d'un modèle

- Intensité Idée : pas de fortes dégradations, peu de paramètres du modèle, différenciation des MC et MP.
- Efficacité de la maintenance  $AI A(\rho_J, \rho_J) - ARA_1(\rho_V, \rho_V)$  : efficacités de la maintenance en période de jeunesse et d'usure différentes.

# Application à des données réelles II

---

## Estimations

$\hat{\rho}_j = 0.49$	$\hat{\rho}_v = 0.99$	$\hat{\epsilon} = 0.89$	$\hat{\eta} = 1113$
-----------------------	-----------------------	-------------------------	---------------------

## Analyse

- Période de jeunesse prononcée.
- $\hat{t}_J = 1174$ .
- Durée de période de jeunesse divisée par deux.
- Maintenances presque parfaites en période d'usure.

# Limites et nouvelles directions

---

## Limites :

- La courbe en baignoire est la résultante de deux phénomènes bien distincts : l'usure et les défauts de conception.
- En période de jeunesse, les maintenances efficaces proposées rendent le système plus vieux : on ne tient compte que des défauts de rodage et pas du tout de la dégradation du système.
- Dans le cas où on possède l'information du type de maintenance effectué (rodage ou usure), on peut décrire le comportement du système de manière plus fine que précédemment.

## Orientations :

- Dissocier le processus de dégradation du processus lié aux défauts de conception.
- Dissocier les efficacités des maintenances pour chacun des processus.
- Proposer un cadre plus général où l'on peut avoir connaissance des causes des défaillances (rodage ou usure).

# Principe des risques concurrents classiques

---

Cooke et Paulsen (1994)

Après la  $k^{\text{ème}}$  maintenance, on définit deux **variables de risques** :

- $R_{k+1}$  = durée potentielle d'attente de la prochaine maintenance, si elle est due à un défaut de conception.
- $Z_{k+1}$  = durée potentielle d'attente de la prochaine maintenance, si elle est due à la dégradation du système.

## Observations

En pratique, les  $R_{k+1}$  et les  $Z_{k+1}$  ne sont pas observées. On observe uniquement :

- La durée inter-maintenance :  $T_{k+1} = \min(R_{k+1}, Z_{k+1})$
- Le type de la maintenance :  $U_{k+1} = \begin{cases} -1 & \text{si } R_{k+1} < Z_{k+1} & \text{(rodage)} \\ 0 & \text{si } Z_{k+1} < Y_{k+1} & \text{(usure)} \end{cases}$

## Construction d'un modèle

---

**Remarque** : La définition proposée reste parfaitement compatible aux modèles prenant aussi en compte des maintenances préventives (indicateur +1 et risque  $Y_{k+1}$ ).

## Construction d'un modèle de risques concurrents et d'âges virtuels

---

- Définir la dépendance entre les risques pour un système neuf : définir les intensités de maintenance pour chacun des risques pour un nouveau système.
- Définir un modèle d'âge effectif pour chacun des risques : ces modèles sont presque toujours symétriques.

→ A partir de l'observation d'instantanés et types de maintenance, il est possible de calculer la fonction de vraisemblance.

## Le modèle

---

- Les risques  $Z_1$  et  $R_1$  sont indépendants. Hypothèse réaliste car la nature des risques est très différente.
- La loi marginale de  $Z_1$  est une loi de Weibull :  $\lambda_Z(t) = \alpha_Z \beta_Z t^{\beta_Z - 1}$ , avec  $\alpha_Z > 0$  et  $\beta_Z > 1$ .
- La loi marginale de  $R_1$  est une loi de Weibull :  $\lambda_R(t) = \alpha_R \beta_R t^{\beta_R - 1}$ , avec  $\alpha_R > 0$  et  $\beta_R < 1$ .
- On considère des âges effectifs disymétriques  $A_{R,n}$  et  $A_{Z,n}$  : après une maintenance due à un défaut de jeunesse, la maintenance est minimale (ABAO) sur chacun des risques :

$$U_n = -1 \Rightarrow A_{R,n} = C_n$$

Si la maintenance est due à la dégradation, la maintenance est de type  $ARA_1$  pour le risque lié à l'usure et reste minimale pour le risque lié aux défauts de jeunesse.

$$U_n = 0 \Rightarrow A_{Z,n} = (1 - \rho)T_n$$

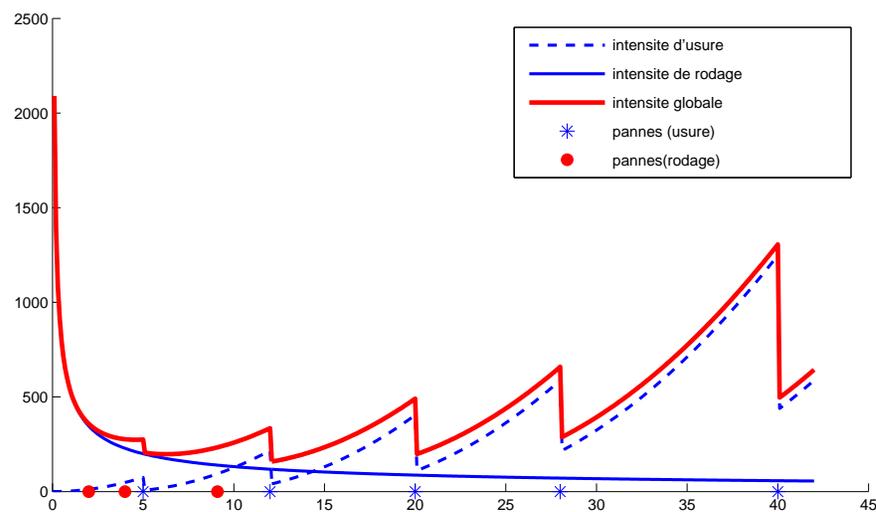
# Propriétés

## Expression explicite des d'âges effectifs

$$\forall n > 0, \quad A_{R,n} = T_n$$

$$\forall n > 0, \quad A_{Z,n} = T_n - \rho \sum_{j=1}^n \left[ \prod_{k=j+1}^n (-U_k) \right] (1 + U_j) T_j$$

## Exemple de trajectoire



# Modèle sans observation des types de maintenances

---

→ On conserve le même modèle mais les indicateurs  $U_i$  ne sont pas observés.

→ Comme les âges  $A_{Z,n}$  dépendent des  $U_i$ , le calcul des intensités et de la fonction de vraisemblance est bien plus complexe. Voici deux méthodes pour contourner ce problème :

**Méthode exacte** : conditionner sur l'ensemble des types d'indicateurs possibles : calcul pouvant être exponentiel  $O(2^n)$ .

→ Utiliser la méthode EM (principe similaire à celui présenté par Bertholon/Bousquet/Celeux) [en cours]

**Méthode pratique** : Par définition, les défauts de rodage interviennent durant la période de jeunesse.

→ Utiliser un avis d'expert pour déterminer la fin de la période de jeunesse  $t_J$  et faire l'hypothèse que toutes les maintenances après  $t_J$  sont dues à l'usure du système.

# Conclusion et perspectives

---

- Proposition de deux modélisations de la période de jeunesse : l'une à l'aide d'une intensité en baignoire et la seconde en utilisant le cadre des risques concurrents.
- Des applications ont été effectuées pour la première modélisation.
- Pour la seconde modélisation, il est nécessaire de terminer d'implémenter la méthode EM et d'appliquer cette méthode sur un jeu de données.
- Comparer la pertinence des deux modélisations.
- Avoir une méthode de sélection pour chaque modélisation (type d'intensité, choix des âges effectifs...)