Temps d'atteinte, processus gamma et covariables

Laurent Bordes, Christian Paroissin & Ali Salami

Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications
Université de Pau et des Pays de l'Adour

23/01/2009

Modèle

Temps d’atteinte

Conclusions et perspectives

Modèle de dégradation

avec des covariables dépendantes du temps

Rappel sur le processus gamma

Définition

Soit $\xi \in \mathbb{R}_+$ *et* $\eta = (\eta_t)_{t \geqslant 0}$ *une fonction réelle croissante tq* $\eta_0 = 0$. (D_t) *est un processus gamma de paramètres* (ξ, η) *ssi*

1. $D_0 = 0$
2. *les accroissements de* (D_t) *sont indépendants*
3. *les accroissements* $D_{t+\delta} - D_t$ *de* (D_t) *sont de loi gamma de paramètres* $(\xi, \eta_{t+\delta} - \eta_t)$

Rappel sur le processus gamma

Définition

Soit $\xi \in \mathbb{R}_+$ *et* $\eta = (\eta_t)_{t \geqslant 0}$ *une fonction réelle croissante tq* $\eta_0 = 0$. (D_t) *est un processus gamma de paramètres* (ξ, η) *ssi*

1. $D_0 = 0$
2. *les accroissements de* (D_t) *sont indépendants*
3. *les accroissements* $D_{t+\delta} - D_t$ *de* (D_t) *sont de loi gamma de paramètres* $(\xi, \eta_{t+\delta} - \eta_t)$

Densité de D_t :

$$f_{D_t}(x) = \frac{1}{\xi \Gamma(\eta_t)} \left(\frac{x}{\xi} \right)^{\eta_t - 1} e^{-x/\xi} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Exemple

1. *Cas linéaire :* $\eta_t = \alpha t$. *Processus à accroissements stationnaires (processus de Lévy).*

Exemple

1. *Cas linéaire :* $\eta_t = \alpha t$. *Processus à accroissements stationnaires (processus de Lévy).*

2. *Cas non-linéaire 1 :* $\eta_t = \alpha t^\beta$

Exemple

1. *Cas linéaire :* $\eta_t = \alpha t$. *Processus à accroissements stationnaires (processus de Lévy).*

2. *Cas non-linéaire 1 :* $\eta_t = \alpha t^\beta$

3. *Cas non-linéaire 2 :* $\eta_t = \beta_0 (1 - y_0^{\beta_2} \beta_1 \beta_2 t)^{-\beta_2^{-1}}$*, courbe de Paris-Erdogan (Lawless & Crowder, 2004)*

Intégration de covariables ou effets aléatoires

Quelques modèles proposés :

Intégration de covariables ou effets aléatoires

Quelques modèles proposés :

- Singpurwalla (1995)

Intégration de covariables ou effets aléatoires

Quelques modèles proposés :

- Singpurwalla (1995)
- Bagdonavicius & Nikulin (2001) : modèle de vie accélérée $t \longrightarrow te^{x'b}$

Intégration de covariables ou effets aléatoires

Quelques modèles proposés :

- Singpurwalla (1995)
- Bagdonavicius & Nikulin (2001) : modèle de vie accélérée $t \longrightarrow te^{x'b}$
- Lawless & Crowder (2004) : ξ aléatoire et dépend de covariables x

Intégration de covariables ou effets aléatoires

Quelques modèles proposés :

- Singpurwalla (1995)
- Bagdonavicius & Nikulin (2001) : modèle de vie accélérée $t \longrightarrow te^{x'b}$
- Lawless & Crowder (2004) : ξ aléatoire et dépend de covariables x
- Zhao *et al.* (2009)

Modèle proposé

Description du modèle :

Modèle proposé

Description du modèle :

- Covariables

Modèle proposé

Description du modèle :

- Covariables
  - deux états possibles : 0 (conditions normales) et 1 (forte sollicitation)

Modèle proposé

Description du modèle :

- Covariables
  - deux états possibles : 0 (conditions normales) et 1 (forte sollicitation)
  - dynamique markovienne (Z_t) :

Modèle proposé

Description du modèle :

- Covariables
  - deux états possibles : 0 (conditions normales) et 1 (forte sollicitation)
  - dynamique markovienne (Z_t) : processus markovien de saut sur $\{0, 1\}$

Modèle proposé

Description du modèle :

- Covariables
  - deux états possibles : 0 (conditions normales) et 1 (forte sollicitation)
  - dynamique markovienne (Z_t) : processus markovien de saut sur $\{0,1\} \Rightarrow$ sachant $Z_0 = 0$, loi de Z_t = loi de Bernoulli de paramètre p_t :

$$p_t = \mathbb{P}[Z_t = 1 \,|\, Z_0 = 0] = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$

Modèle proposé

Description du modèle :

- Covariables
  - deux états possibles : 0 (conditions normales) et 1 (forte sollicitation)
  - dynamique markovienne (Z_t) : processus markovien de saut sur $\{0,1\} \Rightarrow$ sachant $Z_0 = 0$, loi de Z_t = loi de Bernoulli de paramètre p_t :

$$p_t = \mathbb{P}[Z_t = 1 \,|\, Z_0 = 0] = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$

- Dégradation :

Modèle proposé

Description du modèle :

- Covariables
  - deux états possibles : 0 (conditions normales) et 1 (forte sollicitation)
  - dynamique markovienne (Z_t) : processus markovien de saut sur $\{0, 1\} \Rightarrow$ sachant $Z_0 = 0$, loi de Z_t = loi de Bernoulli de paramètre p_t :

$$p_t = \mathbb{P}[Z_t = 1 \,|\, Z_0 = 0] = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$

- Dégradation :
  - conditions normales : processus gamma de paramètre (ξ, η_t)

Modèle proposé

Description du modèle :

- Covariables
  - deux états possibles : 0 (conditions normales) et 1 (forte sollicitation)
  - dynamique markovienne (Z_t) : processus markovien de saut sur $\{0,1\} \Rightarrow$ sachant $Z_0 = 0$, loi de Z_t = loi de Bernoulli de paramètre p_t :

$$p_t = \mathbb{P}[Z_t = 1 \mid Z_0 = 0] = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$

- Dégradation :
  - conditions normales : processus gamma de paramètre $(\xi, \eta t)$
  - forte sollicitation : processus gamma de paramètre $(\xi, \eta bt)$ avec $b \geqslant 1$

- (T_n) instants de sauts du processus (Z_t)

- (T_n) instants de sauts du processus (Z_t)
- Processus (D_t) de dégradation :

- (T_n) instants de sauts du processus (Z_t)

- Processus (D_t) de dégradation :

$$D_t = \sum_{k=1}^{n} (D_{T_k} - D_{T_{k-1}}) + (D_t - D_{T_n}) \ ,$$

si $T_n \leqslant t < T_{n+1}$

- (T_n) instants de sauts du processus (Z_t)
- Processus (D_t) de dégradation :

$$D_t = \sum_{k=1}^{n} (D_{T_k} - D_{T_{k-1}}) + (D_t - D_{T_n}) \ ,$$

si $T_n \leqslant t < T_{n+1}$

- Conditionnellement à (T_n), $D_{T_k} - D_{T_{k-1}}$ est une va de loi gamma :

- (T_n) instants de sauts du processus (Z_t)

- Processus (D_t) de dégradation :

$$D_t = \sum_{k=1}^{n} (D_{T_k} - D_{T_{k-1}}) + (D_t - D_{T_n}) \ ,$$

  si $T_n \leqslant t < T_{n+1}$

- Conditionnellement à (T_n), $D_{T_k} - D_{T_{k-1}}$ est une va de loi gamma :
  - de paramètre $(\xi, \eta_{T_k} - \eta_{T_{k-1}})$ si k impair

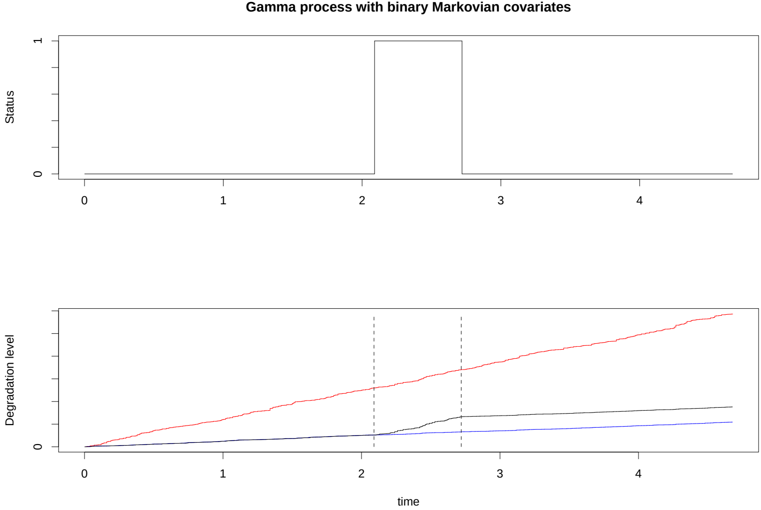
- (T_n) instants de sauts du processus (Z_t)
- Processus (D_t) de dégradation :

$$D_t = \sum_{k=1}^{n}(D_{T_k} - D_{T_{k-1}}) + (D_t - D_{T_n}) \ ,$$

si $T_n \leqslant t < T_{n+1}$

- Conditionnellement à (T_n), $D_{T_k} - D_{T_{k-1}}$ est une va de loi gamma :
  - de paramètre $(\xi, \eta_{T_k} - \eta_{T_{k-1}})$ si k impair
  - de paramètre $(\xi, \eta_{bT_k} - \eta_{bT_{k-1}})$ sinon

Exemple de simulation



Temps d’atteinte d’un niveau fixe ou aléatoire

Problème général

- Temps d'atteinte d'un niveau fixe $c > 0$ ou aléatoire C par le processus de dégradation :

$$T_c = \inf\{t \geqslant 0 \; ; \; D_t \geqslant c\}$$

Problème général

- Temps d'atteinte d'un niveau fixe $c > 0$ ou aléatoire C par le processus de dégradation :

$$T_c = \inf\{t \geqslant 0 \; ; \; D_t \geqslant c\}$$

- (D_t) : trajectoires croissantes

$$\forall t \geqslant 0 \, , \quad \mathbb{P}[T_c > t] = \mathbb{P}[D_t < c]$$

Problème général

- Temps d'atteinte d'un niveau fixe $c > 0$ ou aléatoire C par le processus de dégradation :

$$T_c = \inf\{t \geqslant 0 \; ; \; D_t \geqslant c\}$$

- (D_t) : trajectoires croissantes

$$\forall t \geqslant 0 \, , \quad \mathbb{P}[T_c > t] = \mathbb{P}[D_t < c]$$

- Trois cas étudiées :

Problème général

- Temps d'atteinte d'un niveau fixe $c > 0$ ou aléatoire C par le processus de dégradation :

$$T_c = \inf\{t \geqslant 0 \ ; \ D_t \geqslant c\}$$

- (D_t) : trajectoires croissantes

$$\forall t \geqslant 0 \ , \quad \mathbb{P}[T_c > t] = \mathbb{P}[D_t < c]$$

- Trois cas étudiées :
  - Absence de covariables

Problème général

- Temps d'atteinte d'un niveau fixe $c > 0$ ou aléatoire C par le processus de dégradation :

$$T_c = \inf\{t \geqslant 0 \; ; \; D_t \geqslant c\}$$

- (D_t) : trajectoires croissantes

$$\forall t \geqslant 0 \, , \quad \mathbb{P}[T_c > t] = \mathbb{P}[D_t < c]$$

- Trois cas étudiées :
  - Absence de covariables
  - Un seul saut ($\mu = 0$)

Problème général

- Temps d'atteinte d'un niveau fixe $c > 0$ ou aléatoire C par le processus de dégradation :

$$T_c = \inf\{t \geqslant 0 \; ; \; D_t \geqslant c\}$$

- (D_t) : trajectoires croissantes

$$\forall t \geqslant 0 \, , \quad \mathbb{P}[T_c > t] = \mathbb{P}[D_t < c]$$

- Trois cas étudiées :
  - Absence de covariables
  - Un seul saut ($\mu = 0$)
  - Cas général stationnaire

Notations

- $\Gamma(\cdot)$: fonction gamma

Notations

- $\Gamma(\cdot)$: fonction gamma
- $\Gamma(\cdot,\cdot)$: fonction gamma incomplète supérieur

Notations

- $\Gamma(\cdot)$: fonction gamma
- $\Gamma(\cdot, \cdot)$: fonction gamma incomplète supérieur
- $\gamma(\cdot, \cdot)$: fonction gamma incomplète inférieur

Notations

- $\Gamma(\cdot)$: fonction gamma
- $\Gamma(\cdot,\cdot)$: fonction gamma incomplète supérieur
- $\gamma(\cdot,\cdot)$: fonction gamma incomplète inférieur
- $\Psi(\cdot)$: fonction digamma ou dérivée logarithmique de $\Gamma(\cdot)$

Notations

- $\Gamma(\cdot)$: fonction gamma
- $\Gamma(\cdot,\cdot)$: fonction gamma incomplète supérieur
- $\gamma(\cdot,\cdot)$: fonction gamma incomplète inférieur
- $\Psi(\cdot)$: fonction digamma ou dérivée logarithmique de $\Gamma(\cdot)$
- ${}_pF_q$: fonction hypergéometrique généralisée

$${}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}\ ,$$

où $(x)_n=\Gamma(x+n)/\Gamma(x)$ (symbole de Pochammer)

Notations

- $\Gamma(\cdot)$: fonction gamma
- $\Gamma(\cdot,\cdot)$: fonction gamma incomplète supérieur
- $\gamma(\cdot,\cdot)$: fonction gamma incomplète inférieur
- $\Psi(\cdot)$: fonction digamma ou dérivée logarithmique de $\Gamma(\cdot)$
- ${}_pF_q$: fonction hypergéometrique généralisée

$$ {}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}\ , $$

où $(x)_n=\Gamma(x+n)/\Gamma(x)$ (symbole de Pochammer)

Références : Abramowitz & Stegun (1972), Gradshteyn & Ryzhik (1965)

Absence de covariables

Etudié dans le cas stationnaire par Park & Padgett (2004).

Absence de covariables

Etudié dans le cas stationnaire par Park & Padgett (2004).
Exentension immédiate au cas général :

Absence de covariables

Etudié dans le cas stationnaire par Park & Padgett (2004).
Exentension immédiate au cas général :

Proposition

La fonction de répartition de T_c est :

$$F_{T_c}(t) = \frac{\Gamma(\eta_t, c/\xi)}{\Gamma(\eta_t)}$$

Si η est dérivable, alors la densité de T_c est :

$$f_{T_c}(t) = \eta_t' \left(\Psi(\eta_t) - \log\left(\frac{c}{\xi}\right)\right)\left(1 - \frac{\Gamma(\eta_t, c/\xi)}{\Gamma(\eta_t)}\right)$$

$$+ \frac{\eta_t'}{\eta_t^2 \Gamma(\eta_t)} \left(\frac{c}{\xi}\right)^{\eta_t} {}_2F_2(\eta_t, \eta_t; \eta_t + 1, \eta_t + 1; -c/\xi)$$

Pour la fonction de répartition :

$$\mathbb{P}[T_c \leqslant t] \quad = \quad \mathbb{P}[D_t \geqslant c]$$

Pour la fonction de répartition :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[T_c \leqslant t] &= \mathbb{P}[D_t \geqslant c] \\
&= \int_c^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\eta_t)\xi^{\eta_t}} y^{\eta_t - 1} \exp\left(-\frac{y}{\xi}\right) dy
\end{aligned}
$$

Pour la fonction de répartition :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[T_c \leqslant t] &= \mathbb{P}[D_t \geqslant c] \\ &= \int_c^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\eta_t)\xi^{\eta_t}} y^{\eta_t - 1} \exp\left(-\frac{y}{\xi}\right) dy \\ &= \frac{\Gamma(\eta_t, c/\xi)}{\Gamma(\eta_t)}\end{aligned}$$

Pour la densité :

$$f_{T_c}(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta_t)} \frac{d}{dt} \Gamma(\eta_t, c/\xi) - \frac{\eta_t'}{\Gamma(\eta_t)} \Psi(\eta_t) \Gamma(\eta_t, c/\xi)$$

Pour la densité :

$$f_{T_c}(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta_t)} \frac{d}{dt} \Gamma(\eta_t, c/\xi) - \frac{\eta_t'}{\Gamma(\eta_t)} \Psi(\eta_t) \Gamma(\eta_t, c/\xi)$$

Calcul de la dérivée de $\Gamma(\eta_t, c/\xi)$ par rapport à t :

Pour la densité :

$$f_{T_c}(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta_t)} \frac{d}{dt} \Gamma(\eta_t, c/\xi) - \frac{\eta_t'}{\Gamma(\eta_t)} \Psi(\eta_t) \Gamma(\eta_t, c/\xi)$$

Calcul de la dérivée de $\Gamma(\eta_t, c/\xi)$ par rapport à t :

$$\Gamma(\eta_t, c/\xi) = \Gamma(\eta_t) - \gamma(\eta_t, c/\xi) = \Gamma(\eta_t) - \frac{(c/\xi)^{\eta_t}}{\eta_t} {}_1F_1\left(\eta_t; \eta_t + 1; -c/\xi\right) \ ,$$

Pour la densité :

$$f_{T_c}(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta_t)} \frac{d}{dt} \Gamma(\eta_t, c/\xi) - \frac{\eta_t'}{\Gamma(\eta_t)} \Psi(\eta_t) \Gamma(\eta_t, c/\xi)$$

Calcul de la dérivée de $\Gamma(\eta_t, c/\xi)$ par rapport à t :

$$\Gamma(\eta_t, c/\xi) = \Gamma(\eta_t) - \gamma(\eta_t, c/\xi) = \Gamma(\eta_t) - \frac{(c/\xi)^{\eta_t}}{\eta_t} {}_1F_1\left(\eta_t; \eta_t + 1; -c/\xi\right) ,$$

Or,

$$\frac{d}{dt} {}_1F_1\left(\eta_t; \eta_t + 1; -c/\xi\right)$$
$$= \frac{\eta_t'}{\eta_t} \left({}_1F_1\left(\eta_t; \eta_t + 1; -c/\xi\right) - {}_2F_2\left(\eta_t, \eta_t; \eta_t + 1, \eta_t + 1; -c/\xi\right) \right) .$$

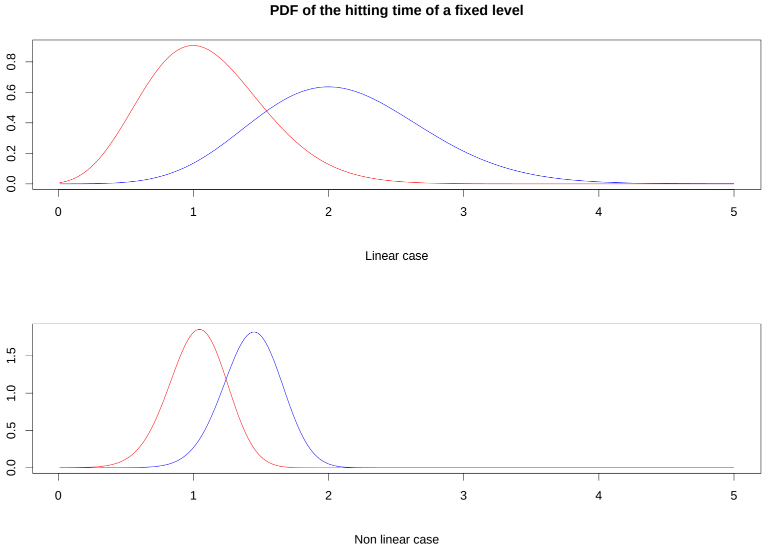
Pour la densité :

$$f_{T_c}(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta_t)}\frac{d}{dt}\Gamma(\eta_t, c/\xi) - \frac{\eta_t'}{\Gamma(\eta_t)}\Psi(\eta_t)\Gamma(\eta_t, c/\xi)$$

Calcul de la dérivée de $\Gamma(\eta_t, c/\xi)$ par rapport à t : D'où,

$$\frac{d}{dt}\Gamma(\eta_t, c/\xi) = \eta_t'\Gamma(\eta_t)\left(\Psi(\eta_t) - \log(c/\xi)\right)$$

$$+\eta_t'\log(c/\xi)\Gamma(\eta_t, c/\xi) + \frac{\eta_t'(c/\xi)^{\eta_t}}{\eta_t^2}\,{}_2F_2\left(\eta_t, \eta_t; \eta_t + 1, \eta_t + 1; -c/\xi\right)$$


PDF of the hitting time of a fixed level
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
1
2
3
4
5
Linear case
0.0
0.5
1.0
1.5
0
1
2
3
4
5
Non linear case

Quid pour un seuil aléatoire (cf. Abdel-Hameed, 1975) ?

Quid pour un seuil aléatoire (cf. Abdel-Hameed, 1975) ? Soit C une va de loi exponentielle de paramètre ρ et T_C le temps d'atteinte de ce seuil.

Quid pour un seuil aléatoire (cf. Abdel-Hameed, 1975) ? Soit C une va de loi exponentielle de paramètre ρ et T_C le temps d'atteinte de ce seuil.

Proposition

La fonction de répartition de T_c est :

$$F_{T_C}(t) = 1 - (1 + \rho\xi)^{-\eta_t}$$

et la densité de T_c est :

$$f_{T_C}(t) = \eta_t'(1 + \rho\xi)^{-\eta_t} \log(1 + \rho\xi)$$

Quid pour un seuil aléatoire (cf. Abdel-Hameed, 1975) ? Soit C une va de loi exponentielle de paramètre ρ et T_C le temps d'atteinte de ce seuil.

Proposition

La fonction de répartition de T_c est :

$$F_{T_C}(t) = 1 - (1 + \rho\xi)^{-\eta_t}$$

et la densité de T_c est :

$$f_{T_C}(t) = \eta_t'(1 + \rho\xi)^{-\eta_t} \log(1 + \rho\xi)$$

Même résultat que Frenk & Nicolai (2007) par une autre méthode.

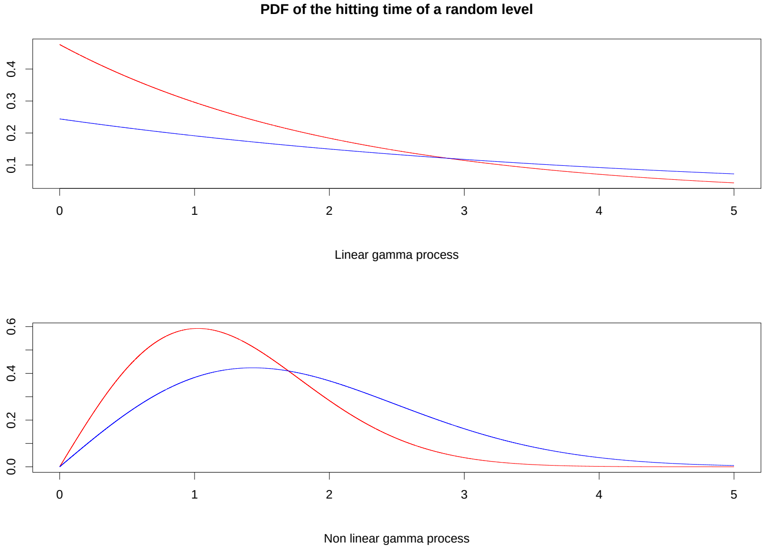
$$\mathbb{P}[T_C \leqslant t] \;=\; \int_0^\infty \mathbb{P}[T_C \leqslant t \,|\, C = x]\rho e^{-\rho x}\,dx$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[T_C \leqslant t] &= \int_0^\infty \mathbb{P}[T_C \leqslant t \mid C = x]\rho e^{-\rho x}\, dx \\
&= \frac{\rho}{\Gamma(\eta_t)} \int_0^\infty \Gamma(\eta_t, x/\xi) e^{-\rho x}\, dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[T_C \leqslant t] &= \int_0^\infty \mathbb{P}[T_C \leqslant t \,|\, C = x]\rho e^{-\rho x}\, dx \\
&= \frac{\rho}{\Gamma(\eta_t)} \int_0^\infty \Gamma(\eta_t, x/\xi) e^{-\rho x}\, dx
\end{aligned}
$$

Application de la formule (6.5.36) dans Abramowitz & Stegun (1972) :

$$
F_{T_C}(t) = 1 - \left(\frac{1}{1+\rho\xi}\right)^{\eta_t}
$$


PDF of the hitting time of a random level
0.1
0.2
0.3
0.4
0
1
2
3
4
5
Linear gamma process
0.0
0.2
0.4
0.6
0
1
2
3
4
5
Non linear gamma process

Cas général ?

Cas général ? Approximation par un mélange de loi d’Erlang.

Cas général ? Approximation par un mélange de loi d'Erlang.

Proposition

Soit C une va de densité :

$$f_C(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \rho^{k_i} \frac{x^{k_i-1}}{(k_i-1)!} e^{-\rho x}$$

avec $(p_1, \dots, p_n)$ *tq* $p_1 + \cdots + p_n = 1$, $\rho > 0$ *et* $k_1, \dots, k_n > 0$.
Alors la fonction de répartition de T_C *est :*

$$F_{T_C}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{k_i!} (\eta_t)_{k_i} \frac{(\rho\xi)^{k_i}}{(1+\rho\xi)^{k_i+\eta_t}} {}_2F_1\left(1, \eta_t + k_i; k_i; \frac{\rho\xi}{1+\rho\xi}\right)$$

Un seul saut

- On suppose que $\mu = 0$: état 1 absorbant = un seul saut !

Un seul saut

- On suppose que $\mu = 0$: état 1 absorbant = un seul saut !
- Λ : date du seul saut du processus (Z_t) = va de loi exponentielle de paramètre λ

Un seul saut

- On suppose que $\mu = 0$: état 1 absorbant = un seul saut !
- Λ : date du seul saut du processus (Z_t) = va de loi exponentielle de paramètre λ
- Modèles connexes : par exemple, Saassouh *et al.* (2007)

Expression pour la loi de D_t (avec t fixé) :

Expression pour la loi de D_t (avec t fixé) :

- conditionnement par rapport à l'instant du seul saut

Expression pour la loi de D_t (avec t fixé) :

- conditionnement par rapport à l'instant du seul saut
- décomposition de l'intégrale sur les intervalles $[0, t[$ et $[t, \infty[$

Expression pour la loi de D_t (avec t fixé) :

- conditionnement par rapport à l'instant du seul saut
- décomposition de l'intégrale sur les intervalles $[0, t[$ et $[t, \infty[$
- fonction de survie de D_t :

$$\mathbb{P}[D_t \geqslant c] = \int_0^t \frac{\Gamma(\eta_u + \eta_{a(t-u)}, c/\xi)}{\Gamma(\eta_u + \eta_{a(t-u)})} \lambda e^{-\lambda u}\, du + \frac{\Gamma(\eta_t, c/\xi) e^{-\lambda t}}{\Gamma(\eta_t)}$$

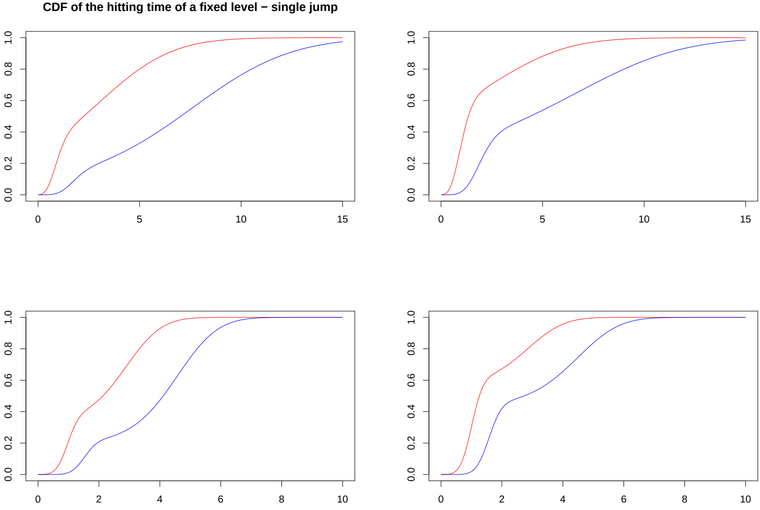
Expression pour la loi de D_t (avec t fixé) :

- conditionnement par rapport à l'instant du seul saut
- décomposition de l'intégrale sur les intervalles $[0, t[$ et $[t, \infty[$
- fonction de survie de D_t :

$$\mathbb{P}[D_t \geqslant c] = \int_0^t \frac{\Gamma(\eta_u + \eta_{a(t-u)}, c/\xi)}{\Gamma(\eta_u + \eta_{a(t-u)})} \lambda e^{-\lambda u}\, du + \frac{\Gamma(\eta_t, c/\xi) e^{-\lambda t}}{\Gamma(\eta_t)}$$

- transformée de Laplace de D_t (cas linéaire essentiellement) :

$$\mathbb{E}[e^{-zD_t}] = \lambda(1+z\xi)^{-\alpha t} \frac{1 - e^{-\lambda t}(1+z\xi)^{\alpha(a-1)t}}{\lambda - \alpha(a-1)\ln(1+z\xi)} + (1+z\xi)^{-\alpha t} e^{-\lambda t}$$


CDF of the hitting time of a fixed level − single jump
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
5
10
15
0
2
4
6
8
10

Cas général stationnaire

- (D_t) = processus à accroissements stationnaires et indépendants (processus de Lévy)

Cas général stationnaire

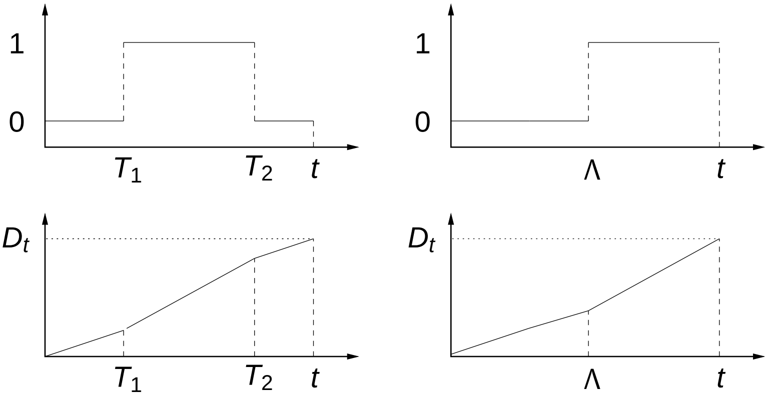
- (D_t) = processus à accroissements stationnaires et indépendants (processus de Lévy)
- Ou encore (D_{T_n}) : processus de renouvellement alterné (sur la base de deux lois gamma)

Cas général stationnaire

- (D_t) = processus à accroissements stationnaires et indépendants (processus de Lévy)
- Ou encore (D_{T_n}) : processus de renouvellement alterné (sur la base de deux lois gamma)
- Conséquence : "permutations" possibles des acroisssements sur les intervalles $[0, T_1[, [T_1, T_2[, \ldots, [T_n, t]$ (avec $T_n \leqslant t < T_{n+1}$)

Cas général stationnaire

- (D_t) = processus à accroissements stationnaires et indépendants (processus de Lévy)
- Ou encore (D_{T_n}) : processus de renouvellement alterné (sur la base de deux lois gamma)
- Conséquence : "permutations" possibles des acroisssements sur les intervalles $[0, T_1[, [T_1, T_2[, \ldots, [T_n, t]$ (avec $T_n \leqslant t < T_{n+1}$)
- Quantité d'intérêt : Λ = temps de séjour dans l'état 0 pour le processus de covariables sur $[0, t]$


1
0
T_1
T_2
t
1
0
Λ
t
D_t
T_1
T_2
t
D_t
Λ
t

Loi de Λ ?

Loi de Λ ? De Souza e Silva & Gail (1986), Sericola (1988, 1990, 1994)

Loi de Λ ? De Souza e Silva & Gail (1986), Sericola (1988, 1990, 1994)

$$\mathbb{P}[\Lambda \leqslant u] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\tau t} \frac{(\tau t)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \Omega(n,k) \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{u}{t}\right)^i \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-i}$$

avec :

- $\tau = \max(\lambda, \mu)$: horloge du processus (Z_t)
- $\Omega(n,k)$: probabilité que la chaîne harmonisée visite k fois l'état 0 en n transitions $\rightarrow$ relation de réccurence

Loi de Λ ? De Souza e Silva & Gail (1986), Sericola (1988, 1990, 1994)

$$\mathbb{P}[\Lambda \leqslant u] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\tau t} \frac{(\tau t)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \Omega(n,k) \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{u}{t}\right)^i \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-i}$$

avec :

- $\tau = \max(\lambda, \mu)$: horloge du processus (Z_t)
- $\Omega(n,k)$: probabilité que la chaîne harmonisée visite k fois l'état 0 en n transitions $\rightarrow$ relation de réccurence

Erreur $\varepsilon(N)$ dans la troncature de la série à N termes :

$$\varepsilon(N) \leqslant 1 - \sum_{n=0}^{N} e^{\tau t} \frac{(\tau t)^n}{n!}$$

Conclusions et perspectives

Encore du travail immédiat. . .

- Cas d'un seul saut : calculs "plus" explicites ?

Encore du travail immédiat. . .

- Cas d'un seul saut : calculs "plus" explicites ?
- Cas général stationnaire : mise en œuvre de calculs numériques ? calculs explicites possibles ?

Encore du travail immédiat. . .

- Cas d'un seul saut : calculs "plus" explicites ?
- Cas général stationnaire : mise en œuvre de calculs numériques ? calculs explicites possibles ?
- Et des covariables non binaires : expressions plus complexes exploitables numériquement ?

Encore du travail immédiat. . .

- Cas d'un seul saut : calculs "plus" explicites ?
- Cas général stationnaire : mise en œuvre de calculs numériques ? calculs explicites possibles ?
- Et des covariables non binaires : expressions plus complexes exploitables numériquement ?
- Et une dynamique non markovienne pour les covariables ? Au moins via des approximations par des lois de type phase ou dans le cas semi-markovien ?

… et d'autres modèles à étudier

- Processus "variance-gamma" :

$$D_t = X_t^{(1)} - X_t^{(2)}$$

avec $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ deux processus gamma indépendants

… et d'autres modèles à étudier

- Processus "variance-gamma" :

$$D_t = X_t^{(1)} - X_t^{(2)}$$

avec $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ deux processus gamma indépendants : le premier processus décrit les dégradations d'un système et le second les améliorations

... et d'autres modèles à étudier

- Processus "variance-gamma" :

$$D_t = X_t^{(1)} - X_t^{(2)}$$

  avec $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ deux processus gamma indépendants : le premier processus décrit les dégradations d'un système et le second les améliorations

- Intégration de covariables comme précédemment dans les processus gamma ?

... et d'autres modèles à étudier

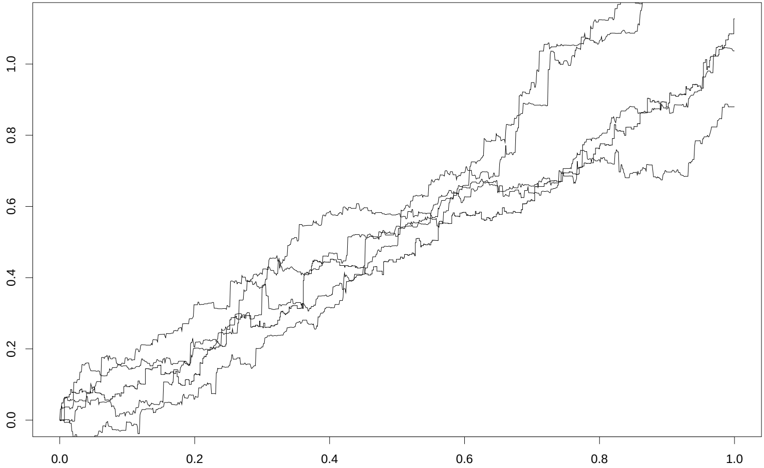
- Processus "variance-gamma" :

$$D_t = X_t^{(1)} - X_t^{(2)}$$

avec $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ deux processus gamma indépendants : le premier processus décrit les dégradations d'un système et le second les améliorations

- Intégration de covariables comme précédemment dans les processus gamma ?

- Temps d'atteinte ? Sur la base des travaux de Jeannin & Pistorius (2007) sur le processus VG


0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0