Régis de la Bretêche
Université Paris 7
Procédés arithmétiques de sommations de séries trigonométriques

Posons $B(\theta) := \theta - [\theta] - 1/2$ si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $B(\theta) := 0$ si $\theta \in \mathbb{Z}$ et désignons par μ la fonction de Mobïus. Davenport a montré en 1937 que la relation

$$\sin(2\pi\theta) = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} B(n\theta)$$

a lieu pour tout nombre réel θ, la convergence étant uniforme en θ. Il conjecture qu'on peut étendre ce type d'identité à certaines séries trigonométriques de sinus.

Avec Gérald Tenenbaum, nous avons étudié, à l'aide d'une méthode nouvelle reposant sur un procédé de sommation arithmétique, les conditions de validité de diverses extensions de cette identité. Nous obtenons par exemple que, si l'on désigne par $\tau(m)$ le nombre des diviseurs d'un entier m, alors on a

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(n\theta)}{n} = 0$$

si, et seulement si, θ est rationnel ou la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\log q_{m+1}}{q_m}$$

converge lorsque $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$ est la suite des dénominateurs des réduites de θ.