Olivier Barrière
INRIA

Processus Auto Régulé Multifractionnaire et applications

De nombreux phénomènes naturels, en particulier en physique, biologie et médecine, présentent des propriétés fractales. La modélisation de tels phénomènes, grâce à l'analyse fractale, a pour but de comprendre plus finement les interactions complexes régissant ces processus.

Le processus auto régulé multifractionnaire (PARM) est né du constat suivant : "Dans la nature, la régularité d'un phénomène dépend souvent des valeurs de ce phénomène." C'est en particulier le cas des montagnes naturelles, qui sont souvent plus irrégulières en altitude. Ce même constat peut être effectué sur des intervalles entre deux battements cardiaques (intervalles "RR"), pour lesquels on remarque que plus le coeur bat lentement, la nuit par exemple, et plus il bat irrégulièrement. A contrario, sur des données "synthétiques", comme le cours en bourse d'une action, on n'observe pas de telles dépendances entre la régularité et l'amplitude. On retrouve ici une dichotomie entre la multifractalité "naturelle", qui est une qualité positive correspondant à une réponse optimale à des contraintes fonctionnelles, et la multifractalité "artificielle", qui constitue une complication indésirable.

Afin de modéliser de tels processus naturels, l'idée est alors d'aller plus loin que le "simple" mouvement Brownien multifractionnaire et proposer un processus donc la régularité n'est plus une fonction du temps, mais du processus lui-même. Ce parm, noté Z, est tel qu'en tout point, il existe une relation fonctionnelle entre $Z(t)$, la valeur de Z à l'instant t et $\alpha_Z(t)$, la régularité de Z au même instant, du type $\alpha_Z = g(Z)$. Il n'est pas possible d'écrire une expression explicite de ce processus, qui résulte d'une utilisation d'un théorème de point fixe dans un espace de Banach de fonctions continues, qui fournit à la fois l'existence et l'unicité du processus, mais aussi un algorithme de synthèse.

Cependant, cela ne permet pas un contrôle précis de l'exposant de Hölder. Par exemple, dans le cas où on choisit comme fonction g l'identité, on ne peut seulement affirmer que plus le processus aura des valeurs élevées, et plus il sera irrégulier (et inversement) sans pouvoir prédire les zones où il sera lisse. Dans le but d'utiliser ce processus pour modéliser des données réelles, une "fonction de forme", notée s, ainsi qu'un paramètre de mélange, m, ont été ajoutés à la définition du processus. Cela permet non seulement de contrôler la forme de Z, puisque quand m est grand, Z et s ont essentiellement la même forme, mais également décider d'où le processus sera irrégulier et où il sera lisse, puisque la propriété principale du PARM ($\alpha_Z = g(Z)$) reste valable.