Estimation non-paramétrique de la densité spectrale d'un processus gaussien observé à des instants aléatoires

Pierre, R. Bertrand

Soit $\mathbf{X} = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus gaussien centré à accroissements stationnaires, il admet une représentation

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{it\xi} - 1\right) \cdot f^{1/2}(\xi)\, dW(\xi), \qquad \text{pour tout} \;\; t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

où $W(dx)$ est une mesure de Wiener complexe adaptée et f est une fonction paire, positive appelée densité spectrale. On s'intéresse à l'estimation de la fonction $f(\xi)$ à partir de l'observation d'une trajectoire à des instants discrets irrégulièrement espacés ou aléatoires ; plus précisément, on observe $\big(X(t_0), X(t_1), \ldots, X(t_n)\big)$ avec $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = T_n$.

Le cas $f(\xi) = \sigma^2 \,|\xi|^{-(2H+1)}$ correspond au mouvement brownien fractionnaire et à l'estimation paramétrique de (H, σ). On adopte ici une approche non paramétrique.

L'estimateur de la densité spectrale $f(\xi)$ pour une fréquence $0 < \xi < \infty$ est construit à partir de l'analyse en ondelette du processus X. Soit ψ une *"ondelette mère"*, pour toute échelle et décalage $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on définit respectivement les coefficients d'ondelette théorique et empirique par

$$W_\psi(a,b) := a^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) X(t)\, dt \quad \text{et} \quad e_\psi(a,b) := a^{-1/2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \psi\Big(\frac{t-b}{a}\Big)\, dt \right) X\big(t_i\big).$$

Cas d'une observation de X en temps continu :
Le processus $\big(W_\psi(a,b)\big)_{b \in \mathbb{R}}$ est stationnaire, gaussien, centré, se décorelle à vitesse $|b_2 - b_1|^{-1}$ et a une variance $\mathcal{I}_\psi(a) := a \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(au)|^2 \, f(u)\, du$. Pour une famille de décalages régulièrement espacés $b_1 < b_2 < \cdots < b_N$, l'estimateur de la variance est $I_{\psi,N}(a) := N^{-1} \sum_{k=1}^{N} W_\psi^2(a, b_k)$, il vérifie un TCL

$$\frac{I_{\psi,N}(a) - \mathcal{I}_\psi(a)}{v_N} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{quand} \quad N \to \infty \quad \text{et} \quad (b_N - b_1) \to \infty. \tag{2}$$

Puis, en faisant varier l'ondelette mère pour que $|\widehat{\psi}(x)|^2$ converge vers δ_1 la masse de Dirac en 1, et en contrôlant la vitesse de convergence, on en déduit un estimateur de $f(1/a)$ qui vérifie un TCL (3) avec une nouvelle vitesse w_N.

Cas d'une observation de X discrète et aléatoire :
On définit $J_{\psi,N}(a)$ en remplaçant les coefficients d'ondelette théoriques par les coefficients d'ondelette discrétisés. Pour toute ondelette mère ψ vérifiant des conditions raisonnables de localisation en temps et fréquence, si de plus les intervalles inter-observations et les décalages vérifient les conditions :

(S.r) $\delta_n := \max_{k=0,\ldots,n-1} \|t_{k+1} - t_k\|_s \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *et il existe* $C > 0$ *telle que* $\min_{k=0,\ldots,n-1} \|t_{k+1} - t_k\|_s > C$ *avec* $\|Z\|_\alpha := \left(\mathbb{E}(|Z|^\alpha)\right)^{1/\alpha}$ *pour une v.a.* Z.

(B1) *Il existe* $\rho \in (3/4, 1)$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n^\rho \le b_1 < b_2 < \ldots < b_N \le T_n - T_n^\rho$.

alors les TCL (2) et (3) restent vrais, avec des vitesses de convergence plus faibles.
Deux remarques :

- La condition (S.r) n'impose pas que les v.a. $t_{i+1} - t_i$ soient indépendantes ou identiquement distribuées. Elle est cependant vérifiée pour tout $r \in \mathbb{N}$ dans le cas iid poissonien.
- La condition $(b_{N_n} - b_1) \to \infty$ combinée avec la condition (B1) entraîne que pour une fréquence finie $\xi = 1/a$, la longueur de l'intervalle d'observation T_n tend vers l'infini.

References

[1] Abry, P., Flandrin, P., Taqqu, M.S. and Veitch, D. (2002). Self-similarity and long-range dependence through the wavelet lens, in *Long-range Dependence: Theory and Applications*, P. Doukhan, G. Oppenheim and M.S. Taqqu editors, Birkhäuser.

[2] Aït-Sahalia, Y. & Mykland, P.A. (2008). An analysis of Hansen-Scheinkman moment estimators for discretely and randomly sampled diffusions, *Journal of Econometrics*, In Press.

[3] Bardet, J.M. and Bertrand, P.R. (2008). Wavelet analysis of a continuous-time Gaussian Process observed at random times and its application to the estimation of the spectral density.

[4] Begyn, A. (2005). Quadratic Variations along Irregular Subdivisions for Gaussian Processes. *Electronic Journal of Probability*, 10, p-691-717.

[5] Gao, J.; Anh, V.; Heyde, C. (2002) Statistical estimation of non-stationary Gaussian processes with long-range dependence and intermittency. *Stochastic Process. Appl.* **99**, no. 2, 295–321

[6] Lii, K.S. ; Masry, E. (1994) Spectral estimation of continuous-time stationary processes from random sampling. *Stochastic Process. Appl.* **52**, no. 1, 39–64.