COLLOQUIUM DE MATH-INFO DU POLYTECHNICUM DE MARNE-LA-VALLÉE

(ENPC, ESIEE, Institut Gaspard-Monge, LCPC, UFR de Mathématiques)

Université de Marne-la-Vallée
Bâtiment Copernic - 4ème étage - Salle 4B08R

Mardi 17 janvier 2006

à 14h30

François BLANCHARD

Directeur de Recherches au CNRS
Institut de Mathématiques de Luminy

Ensembles brouillés dans certains systèmes symboliques

Beaucoup de mathématiciens et de physiciens ont essayé de définir le chaos. Lors d'une première tentative, avant même l'invention du célèbre "effet papillon", Li et Yorke ont proposé en 1975 d'utiliser pour cela les ensembles brouillés (en anglais *scrambled sets*). On se place sur un espace X muni d'une distance d et sur lequel on a défini une transformation continue f, on dit qu'une paire de points (x, y) dans X est brouillée si on a en même temps

$$\limsup d(f^n(x), f^n(y)) > 0 \text{ et } \liminf d(f^n(x), f^n(y)) = 0,$$

autrement dit, si au cours des itérations successives de f certaines images de x et y sont arbitrairement proches et si une infinité d'autres s'écartent d'au moins $\epsilon > 0$. Un sous-ensemble E de X est brouillé si toutes ses paires le sont (sauf évidemment celles de la forme (x, x)). Finalement on dit que le système dynamique (X, f) est chaotique au sens de Li et Yorke si X contient un ensemble brouillé non dénombrable.

Quand X est l'intervalle unité et f une transformation quelconque de celui-ci, cette dfinition colle assez bien avec toutes les autres notions de chaoticité existantes. W. Huang, L. Snoha et moi-même essayons dans un article (presque terminé) de déterminer l'information qu'apporte sur un système dynamique général la taille de ses ensembles brouillés. Pour être plus précis, d'abord suivant que les ensembles brouillés sont tous dénombrables, ou qu'il en existe qui ne le sont pas ; ensuite, dans le second cas, suivant la "taille" topologique maximale de ces ensembles dans X: s'ils sont de première ou seconde catégorie, ou résiduels, ou enfin si X tout entier est brouillé (comme il arrive). Conclusion de ce travail : ces informations ne sont pas du tout négligeables, mais bien moins importantes que Li et Yorke ne l'auraient peut-être espéré.

Parmi les systèmes connus ou nouveaux que nous examinons, beaucoup sont symboliques, et c'est de ceux-là que je parlerai. Dans l'ensemble des suite infinies sur un alphabet fini A, un système symbolique est un sous-ensemble X fermé, invariant par le décalage (ou shift) ; la dynamique dont il est muni est justement celle du shift. Le mode de construction de nos exemples est souvent très simple, il s'agit souvent de DOL-systèmes (qui se révèlent avoir des ensembles brouillés de taille très différente suivant les cas) ou de systèmes reconnaissables par automates finis. Ou bien c'est une propriété très simple du langage associé qui entraîne telle restriction sur la taille des ensembles brouillés: si deux mots distincts de même longueur ont même contexte l'intérieur du langage, alors le sous-shift (X, σ) n'a pas d'ensembles brouillés résiduels. Il y a peut-être là de nouveaux points de passage intéressants entre théorie des langages et dynamique.

Organisateurs

Marco CANNONE, Jacques DÉSARMÉNIEN

Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées - Université de Marne-la-Vallée
Cité Descartes - 5, Bd Descartes - Champs-sur-Marne - 77454 Marne-la-Vallée cedex 2
Tél. : 01 60 95 75 20 - Fax : 01 60 95 75 45 - E-mail : mireille.morvan@univ-mlv.fr